NOZIONI PRELIMINARI

SUL METODO

DELLE TRE COORDINATE

DI

GIUSEPPE TRAMONTINI

Professore di Geometria descrittiva nella Scuola d' Artiglieria, e Genio di Modena.

IN MODENA MDCCCVIII

PRESSO LA SOCIETÀ TIPOGRAFICA.

ARTICOLO PRIMO

Del punto.

1. Qualunque oggetto il quale con certa legge, e misure determinate possa concepirsi descritto nello spazio, può altresì essere rappresentato e per mezzo di immagini descritte sopra d' uno o più piani, e per mezzo di formole analitiche, le quali esprimano tutte le condizioni necessarie per determinare la sua forma, grandezza, e posizione.

2. Si concepiscano tre piani, i quali si taglino scambievolmente, e siano estesi indefinitamente per ogni verso. Il primo si chiami A, il secondo B, il terzo C, e tutti tre dicansi *coordinati* fra loro. Questi piani formeranno otto angoli solidi intorno al punto comune a tutti tre, e l'immensità dello spazio sarà dagli angoli stessi distinta in otto regioni. Qual si voglia punto assegnabile nello spazio o esisterà in uno de' piani coordinati, o in uno degli angoli solidi formati da essi d' intorno al punto comune, cui chiameremo O.

3. Immaginiamo nello spazio un punto qualsivoglia P, e da questo sia condotta ad incontrare ciascun piano coordinato una parallela all' intersezione degli altri due.

Si chiami x quella che incontra il piano A, y quella che incontra il piano B, z quella che incontra il piano C, e dicansi fra loro *coordinate* le x, y, z.

Egli è manifesto che il sistema delle tre x, y, z condotte dal punto P sarà in qualche condizione diverso dal sistema di tre altre x', y', z' condotta similmente da un altro punto P'. Imperciocchè quando pure eguali siano in grandezza due *coordinate* cognomini, come per es. le x, x' spettanti a due punti diversi P, P', e riferite al medesimo piano A, o non saranno nel tempo stesso eguali fra loro le altre cognomini y, y'; z, z', o se lo siano, in tal caso o le x, x', o le y, y', o le z, z' non differendo in grandezza, differiranno almeno in posizione, cioè differiranno in quanto alla parte dove esistono per rispetto al piano cui sono riferite.

Per distinguere tutte queste circostanze si stabilisca che le coordinate, le quali si debbono intendere da una certa parte assegnata ad arbitrio per rispetto al piano cui son riferite, siano distinte col segno $+$ positivo, e quelle che debbonsi intendere dalla parte opposta del piano stesso abbiano il segno $-$ negativo.

In tal maniera ogni punto dello spazio avrà o la coordinata x, o la $-x$ relativamente al piano A, la y, o la $-y$ relativamente al piano B, la z, o la $-z$ relativamente al piano C. Quindi computate tutte le combinazioni che si possono formare di tali coordinate a tre a tre, escluse quelle che contengono le coppie cognomini $x, -x$; $y, -y$; $z, -z$, si otterranno gli otto sistemi ternarj espressi nella seguente tavola, e ciascheduno di essi corrisponderà ad uno degli otto angoli solidi che abbiamo definiti al (n.° 2).

$x, +y, +z,$	$x, +y, -z,$
$x, -y, +z,$	$x, -y, -z,$
$-x, -y, +z,$	$-x, -y, -z,$
$-x, +y, +z;$	$-x, +y, -z;$

4. La posizione di un punto P nello spazio sarà determinata se siano date tre equazioni $x=a$; $y=b$; $z=c$, esprimenti i valori delle tre coordinate.

Infatti per la prima intendiamo essere il *punto* P collocato in un piano cui nomino X, parallelo al piano A posto dalla parte positiva, ed in tale distanza che se per un punto qual si voglia del piano X sia condotta fino al piano A una retta parallela all' intersezione del piano B col piano C, essa retta eguagli la data quantità a.

La seconda equazione significa similmente che il punto obbiettivo P si trova in un piano Y parallelo al piano B, dalla parte positiva ed in tale distanza che se da un punto qualunque del piano Y sia condotta fino al piano B una parallela all' intersezione del piano A col piano C, essa retta eguagli la data grandezza b.

Adunque dal significato simultaneo delle due prime equazioni si conosce che il punto P esiste nell' unica retta ove si tagliano i due piani X, Y i quali essendo determinati di posizione, determinata pure sarà la scambievole intersezione di essi.

Per la terza equazione in fine si conosce che il punto P deve giacere in un piano Z parallelo al piano C, posto dalla parte positiva, ed in tale distanza che se da un punto qualunque del piano Z sia condotta al piano C una parallela all' intersezione del piano B col piano A, essa retta eguagli la data quantità c. Adunque il punto obbiettivo P è nell' unico luogo dove il piano Z sega la retta comune agli altri due X, Y, e perciò il punto P, al quale appartengono le coordinate a, b, c è determinato nello spazio dalle date equazioni.

5. Egli è facile vedere che se qual si voglia delle coordinate x, y, z fosse negativa, sarebbe egualmente determinata la posizione del punto P. Se per es. fosse $y=-b$ invece di essere $y=b$, ciò

darebbe ad intendere che il piano Y in cui giace il punto P è posto dalla parte negativa per rispetto al piano coordinato B, le posizioni degli altri due piani X, Z restando le medesime di prima, ec.

6. Ora vogliasi passare dalla rappresentazione algebrica alla costruzione grafica. Sia rappresentato il supposto piano C dal piano del foglio (Fig. 1). Rappresenti la retta VV′ l'intersezione fra 'l piano B ed il piano C; la retta TT′ rappresenti l'intersezione dello stesso piano C col piano A. Il punto O rappresenterà quello che è comune a tutti i tre piani coordinati, e per esso punto O passerà conseguentemente la retta comune ai piani A, B.

Se stabiliscasi che le coordinate positive riferite al piano A, il quale passa per la TT′ debbansi intendere dalla parte V, saranno le negative dalla parte opposta V′. Così se le coordinate positive riferite al piano B, il quale passa per la VV′ siano dalla parte T, le negative saranno dall' opposta parte T′. Finalmente se vogliansi intendere dalla parte superiore per rispetto al piano C le coordinate positive ad esso riferite, saranno dalla parte inferiore le negative.

Presa sulla OV la porzione $Oa=a$ se pel punto a immagineremo condotto un piano X parallelo al piano A, segherà il piano C in una retta ap parallela alla TT′ e passerà pel punto obbiettivo P. (n.° 4). Similmente presa sulla OT la $Ob=b$, se immagineremo pel punto b condotto un piano Y parallelo al piano B, segherà il piano C in una retta bp parallela VV′, e passerà esso pure pel punto obbiettivo P. Perciò quella retta in cui si tagliano i piani X, Y testè condotti pei punti a, e b passa pel punto P. Ma la retta stessa passa pure pel punto p dove si tagliano le due ap, bp, ed è parallela all' intersezione dei piani A, B; dunque la descrizione fatta del punto p indica essere il punto obbiettivo P, in una retta condotta per p parallela all' intersezione de' piani A, B. Ora immaginiamo che il piano B, rotando intorno alla retta VV' come suo asse, venga a porsi per diritto col piano C. Sia la OK la retta in cui si tagliano i piani A, B quando son nella prima loro posizione, e prendasi la parte $OK=c$. È manifesto che se per K si conduca una retta indefinita KP' parallela alla VV', in essa KP' sarà l' intersezione del piano Z (n.° 4) col piano B. Se inoltre si tiri per a una retta aP' parallela ad OK, in essa AP' sarà l' intersezione del piano X col piano B, perciò ragionando come superiormente troveremo che la coordinata condotta dal punto obbiettivo P al piano B, supposto rimesso nella prima sua posizione, cade nel punto P', ovvero, ciò che è lo stesso, la retta condotta dal punto P' parallela alla in tersezione del piano A col piano C passa pel punto obbiettivo P. In oltre $aP'=OK=c$, e perciò la descrizione del punto p e della retta aP' dimostra che il punto obbiettivo P è all' estremità superiore di una retta condotta dal punto p parallela all' intersezione de' piani A, B, ed eguale alla aP'. Adunque il punto P è determinato per mezzo della rappresentazione grafica (Fig. 1).

7. Il punto p si chiama *projezione* del punto obbiettivo P sul piano C, ed il punto P' *projezione* dello stesso punto P sul piano B. Col metodo adoperato per ottenere le projezioni p, P' si potrà pure aver quella sul piano A. La Oa eguaglia la coordinata x condotta dal punto obbiettivo sul piano A; la Ob eguaglia la coordinata y condotta sul piano B; la OK eguaglia la z condotta sul piano C. Perciò le Oa, Ob, Ok si chiamano anch' esse coordinate del punto P. La OV si chiama l' *asse* delle coordinate x positive, la OV' l' *asse* delle x negative. La OT si chiama l' *asse* delle y positive; la OT' l' *asse* delle y negative. La OK si chiama

l'*asse* delle z positive. La OK' l'*asse* delle z negative. Il punto O chiamasi *origine* di esse coordinate.

8. La scambievole inclinazione de' piani coordinati è indifferente all' esattezza dell' esposto metodo. Ma le costruzioni divengono più facili, ed il loro significato più perspicuo se i piani coordinati sian posti ad angoli retti fra loro. Allora gli angoli solidi intorno al punto O son tutti eguali; le coordinate sono perpendicolari ai rispettivi piani, ai quali sono riferite, e quindi misurano le distanze del punto obbiettivo dai piani stessi. Per tutte queste ragioni si vogliono intendere fra loro normali i piani coordinati ed in tal posizione relativa li supporremo sempre per l' avvenire finchè non sia mestieri di cangiare tale disposizione.

9. Dall' ipotesi stabilita nel precedente (*n.*° 8) deriva, che allora quando due piani coordinati sian posti per diritto nel modo indicato (*n.*° 6), la retta che unisce le due projezioni d'un medesimo punto obbiettivo descritte sopra i due mentovati piani, è sempre normale alla scambievole intersezione de' medesimi. Imperciocchè nell' ammessa ipotesi le rette TT', VV' (Fig. 1) sono scambievolmente normali. Normale pure diviene la OK alla VV', e perciò coincide colla TT'. Ambedue le *pa*, P'*a* divengono per conseguenza normali in *a* alla stessa VV', e quindi formano una retta sola che unisce le due projezioni P', *p*.

10. Fra le coordinate di un punto, il quale giaccia in uno de' piani coordinati, quella sarà nulla che si riferisce a tal piano. Le altre due determinan sul piano stesso la posizione del supposto punto obbiettivo. Codeste due coordinate si possono allora riferire non più ai due piani corrispondenti, ma alle due rette, nelle quali i piani stessi tagliano il terzo dove è collocato il punto obbiettivo.

Da questo principio deriva il metodo di esprimere la posizione di quanti punti si voglia che siano in un medesimo piano, riferendo le loro coordinate a due rette date nel piano stesso, le quali s' incontrino in un punto.

Per motivi analoghi a quelli che furono esposti (*n.*° 8) le due rette accennate si pongono d' ordinario fra loro normali.

Le TT', VV' rappresentano un esempio di tali rette, che nel supposto caso ritengono il nome di *assi delle coordinate*. Le ap, bp, $a'p'$, $b'p'$ rappresentano le coordinate rispettive dei punti p, p'.

ARTICOLO SECONDO

Della Linea.

11. Qualunque linea può considerarsi descritta o percorsa da un punto mobile nello spazio. La forma di essa dipenderà dalla legge, con cui si move il punto descrittore, cioè dalla legge con cui procedono le tre distanze del punto stesso da tre piani coordinati, ai quali si riferisce la sua variabile posizione.

Si è veduto (*n.*°6) come tali piani sian rappresentati dalla (Fig. I). La (Fig. II) rappresenti ciò che diviene la (Fig. I) nel caso ammesso al (*n.*° 8). La cognizione di due distanze, o coordinate $Oa = x$, $Ob = y$, riferite l' una al piano A, l' altra al piano B equivale alla projezione p del punto obbiettivo data sul piano C. Si può ancora per analogia inferire che la cognizione di due distanze o coordinate $Oa = x$, $OK = z$ equivale alla projezione dello stesso punto obbiettivo data sul piano B, ed in fine che la cognizione delle due coordinate y, e z, riferite ai piani B, e C equivale alla projezione del medesimo punto obbiettivo data sul piano A.

Adunque data la legge, con cui procedono le coordinate Oa, Oa', Oa'' ec. riferite al piano A, e le corrispondenti Ob, Ob', Ob'' riferite al piano B si potranno costruire tanti punti p, p', p'' ec. (n.° 6) che siano sul piano C projezioni corrispondenti ad altrettante successive posizioni, nelle quali si trasferisce il punto descrittore. Laonde la linea che passa pei punti p, p', p'' ec. sarà sul piano C projezione di quella che supponghiamo descritta nello spazio, cioè se da qualsivoglia punto di questa medesima linea obbiettiva si concepisca tirata una normale sul piano C, essa lo incontrerà in un punto di quella linea che passa, per tutti i punti p, p', p'' ec.

Se per tanto sia data un' equazione, la quale esprima la relazione scambievole delle x, y, quell' equazione somministrerà quant' è d' uopo per costruire sul piano C la projezione $p\,p'\,p''$ ec. della linea obbiettiva (*n*°. 6). Se inoltre sia data una seconda equazione, la quale esprima la relazione reciproca delle variabili x, z, si potrà costruire la projezione della medesima linea obbiettiva sul piano B. Finalmente da un' equazione che esprima la reciproca relazione delle y, z si dedurrà la terza projezione sul piano A.

12. Egli è vero che da due date equazioni, ciascheduna delle quali determina una projezione della linea obbjettiva, si può ricavare una terza equazione corrispondente alla terza projezione; ma importa avvertire che talvolta nelle due date equazioni non sono distinte tutte le condizioni necessarie per determinar l' obbiettiva. Allora fa mestieri d' una terza equazione non identica con quella che risulta dalle prime due onde rendere completa

l'espressione. Questa proposizione apparirà in maggior luce dopo l'esame di alcuni esempi.

13. Siano date le due equazioni $ax = by$, $cx = dz$. Per la prima conosciamo che le distanze, o coordinate x, y di qualunque punto assegnabile nella obbiettiva conservano fra loro la ragione costante $b:a$. Dunque la projeziono della obbiettiva sul piano C è una retta. In oltre il punto dove l'obbiettiva incontra il piano A è quello medesimo dov' essa incontra il piano B, poichè allora quando sia la coordinata $x=o$, sarà pur la $y=o$. Dunque, (*n*°. 4) l'obbiettiva passa per un punto della retta in cui si tagliano scambievolmente i piani A, B e perciò la sua projezione sul piano C passa pel punto O.

Venendo alla seconda equazione, se faremo sopra di essa le osservazioni medesime che abbiamo fatte sopra la prima, apparirà esser pure una retta la projezione della obbiettiva sul piano B, e passare essa retta pel punto O. Adunque l'obbiettiva passa per un punto comune ai due piani C, B. E si è prima trovato che passa per un punto comune ai due piani A, B; dunque passa pel punto comune a tutti i tre piani coordinati.

Se per la prima projezione si immagini condotto un piano Π perpendicolare al piano C, in esso piano Π saranno tutte le rette che da quali punti si voglia della obbiettiva posson esser condotte perpendicolari al piano C (*n*.° 6). Adunque l'obbiettiva sarà nel piano Π. Similmente immaginando condotto per la seconda projezione un piano Σ perpendicolare al piano B, conchiuderemo che l' obbiettiva giace nel piano Σ. Adunque l'obbiettiva esiste ad un tempo nell' uno, e nell' altro dei piani Π, Σ, cioè nella scambievole intersezione di essi, che passa pel punto O ed è determinata di posizione.

Finalmente la considerata obbiettiva è indefinita di lunghezza; imperciocchè attribuito ad una delle variabili qualsivoglia valore reale, si dedurrà sempre dalle date equazioni un corrispondente valor reale per ciascheduna delle altre due variabili, lo che dimostra che a qualunque valore reale d' una coordinata, corrisponde realmente un punto della obbiettiva.

Per la qual cosa dalle due sole proposte equazioni abbiamo potuto conoscere ogni condizione relativa alla forma, posizione, e grandezza della linea obbiettiva descritta nello spazio da un punto, del quale le variabili coordinate sian soggette alla legge di relazione espressa dalle due equazioni medesime. Egli è perciò manifesto che nulla più resta indeterminato circa la proposta obbiettiva, che è quanto dire la terza equazione non può contenere condizione alcuna, la quale non sia determinata dalle due prime. La terza equazione dunque non puoi' esser se non quella che risulta dalle due date.

14. Da quanto fu detto (n^o. 13) apparisce come determinare si possa una projezione d' un punto qualunque della obbiettiva. Imperciocchè nelle date equazioni attribuito un valore reale ad una delle variabili, per es. alla x, ad esso corrisponderà sempre un determinato valore reale di ciascheduna delle altre due, e quindi si avranno tutte le tre coordinate necessarie per determinare qual si voglia delle tre projezioni del punto corrispondente ($n.^o$ 6). Se dunque pongasi nella prima equazione $x=b$ cioè se vogliasi determinare un punto della obbiettiva, il quale sia alla distanza b dal piano A, ovvero abbia la sua coordinata $x=b$ riferita al piano A, questo punto dovrà avere la coordinata $y=a$ riferita al piano B, perchè posto $x=b$ la prima equazione diviene $ab=by$, d' onde proviene $y=a$.

Presa per tanto la $Oa=b$ (Fig. 2) e condotta nel piano C la retta ap parallela alla TT': presa la

$Ob = n$, e condotta la retta bp parallela ad VV', il punto p, dove si tagliano le ap, bp sarà sul piano C la projezione del supposto punto dell'obbiettiva.

Sostituito ad x un altro valore si ricaverebbe nel modo stesso il corrispondente valore di y, con che sarebbe determinato sul piano C un' altro punto della projezione, e quindi la projezione stessa, che è una retta indefinita; ma essendo già dimostrato nel (n.° 13) che la projezione cercata passa pel punto O, non si avrà che a tirare una retta indefinita per O, p per avere in essa la cercata projezione sul piano C. Col metodo stesso si vede chiaramente che potrà determinarsi la projezione della obbiettiva sopra ciascheduno degli altri due piani A, B.

Che se facciasi $x = -b$, ne verrà $y = -a$, cioè si dovrà prendere la misura Oa dalla parte opposta verso V' e la misura Ob dalla parte opposta verso T' (n.° 5). Compiuta la costruzione, la projezione π O che ne risulta, coinciderà manifestamente colla Op se suppongasi indefinitamente prolungata; che se nell'equazione $ax = by$ fosse b quantità negativa, ed a positiva, sarà $x = \frac{b}{a}y =$ quantità negativa, e l' equazione in tal caso apparterrà ad una retta che ha la sua projezione sul piano C nell' angolo V'OT, siccome per converso una linea posta in tali condizioni deve avere i due membri affetti da segni diversi.

15. Siano le due equazioni $ax = y^2$, $bx = cz$. Esse esprimono

I. Che la linea obbiettiva, e quindi ancora ciascuna sua projezione passa pel punto O comune ai tre piani coordinati, perchè fatta = o qualunque delle tre variabili, diviene = o ciascuna delle altre due, cioè quel punto nel quale l'obbiettiva incontra uno dei piani coordinati, è quel medesimo, nel quale incontra ciascheduno degli altri due, e quindi non può essere se non il punto comune a tutti tre.

II. L'obbiettiva giace tutta dalla parte positiva del piano A, perchè supposto negativo il valore di x, quello di y sarà immaginario, e quindi non avvi alcun punto nell' obbiettiva; il quale possa corrispondere all' ipotesi di x negativa. Ma posta z negativa ne verrà pur x negativa. Dunque nemmeno dalla parte negativa del piano C potrà esistere alcun punto della obbiettiva, e perciò essa giace tutta dalla parte positiva anche per rispetto al piano C.

III. Le coordinate x, z avendo la costante ragione $c : b$, la projezione dell' obbiettiva sul piano B è una linea retta, e quindi l'obbiettiva stessa giace in un piano perpendicolare al piano B (n^o. 13).

IV. Ad ogni valore del quale è suscettibile la coordinata x, corrispondono due valori della y eguali in grandezza, ma diversi per segno, essendo l' uno $+\sqrt{ax}$, l'altro $-\sqrt{ax}$. Questa circostanza combinata colla legge espressa nella seconda equazione fa vedere che assegnato qualunque punto dell'obbiettiva, il quale abbia una data coordinata x riferita al piano A, e per conseguenza la corrispondente y riferita al piano B, e la corrispondente z riferita al piano C, ($n.^i$ 4, 5), vi sarà sempre un altro punto, il quale avrà le medesime coordinate x, z come il primo, e per conseguenza sarà posto dalle medesime parti come il primo per rispetto ai piani A, C, avrà la coordinata y di egual grandezza a quella del primo, ma essendo l' una positiva, l' altra sarà negativa, cioè essendo collocato dalla parte positiva il primo punto per rispetto al piano B, sarà il secondo collocato bensì ad eguale distanza, ma dalla parte negativa per rispetto al piano stesso, talchè volendo concepir brevemente in termini algebrici codesto ragionamento, si conchiuderà che se v' abbia nell'obbiettiva un punto determinato da un sistema di coordinate (x, y, z) ve n' ha sempre un altro determinato dal sistema ($x, -y, +z$) (*n.*° 3).

Da ciò deriva che il piano B divide in due rami eguali, e simili la linea obbiettiva, e la projezione di essa sul piano C è pur divisa in due rami eguali e simili dall' asse delle x, cioè dalla retta VV'.

V. Tanto l' obbiettiva, quanto ciascuna delle sue projezioni procede indefinitamente, ma l' obbiettiva e le projezioni sui piani C, e B procedono soltanto dalla parte positiva del piano A; la projezione poi sul piano A procede dall'una e dall'altra parte del piano B. Questa proposione si rende manifesta osservando che attribuiti ad x valori reali e positivi successivamente più grandi corrispondono a ciascheduno di essi due valori di y sempre reali e successivamente maggiori, eguali in grandezza e sol diversi per segno, come pure un solo valore di z sempre reale e successivamente più grande, affetto dal medesimo segno di x.

Ciascheduno dei punti che sono egualmente distanti, e dalla medesima parte per rispetto al piano A, dalla medesima parte ed egualmente distanti per rispetto al piano C, egualmente distanti, ma a parti opposte per rispetto al piano B, resta compiutamente determinato dalle due date equazioni dalle quali si ricavano i due mentovati sistemi (x, y, z); ($x, -y, +z$).

Per la qual cosa nulla più rimane a determinare col mezzo della terza equazione, la quale per conseguenza dev' essere identica con quella che risulta dalle prime due.

16. La costruzione delle projezioni si eseguirà colla scorta dei principj già stabiliti di sopra. La projezione sul piano B si eseguirà come fu indicato nel (*n.*° 6.).

Per aver quella sul piano C, alle Oa, Oa', Oa'' che rappresentino le successive grandezze di x, si applicheranno le corrispondenti ap, $a'p'$, $a''p''$ medie proporzionali tra le rispettive Oa, Oa', Oa'' e la costante quantità data a. La curva che passa per tutti i punti p, p', p'' ec. sarà un ramo della cercata projezione sul piano C, e prolungando dall' altra parte di VV' le applicate ap, $a'p'$, $a''p''$ ec. sin che i loro prolungamenti eguaglino rispettivamente le applicate stesse, si otterrà il secondo ramo della projezione eguale e simile al primo.

17. La teoria delle sezioni coniche insegna essere la curva p, p', p'' ec. una parabola, il cui parametro $= a$, l' asse OV, il vertice O. Quindi si deduce che l' obbiettiva è un' altra parabola, il cui vertice è pure in O, l' asse è nella projezione dell' obbiettiva stessa sul piano B, il parametro poi

$$= \frac{ac}{\sqrt{(c^2+b^2)}}.$$

Ma al nostro intento basti l' aver riconosciuta nelle due date equazioni la forma e posizione della proposta obbiettiva, ed aver potuto tradurre il senso delle equazioni stesse in una equivalente rappresentazione grafica composta dalle projezioni che supponghiamo descritte.

18. Sian ora proposte le due equazioni $ax = y^2$, $z^3 = b^2x$. Quanto alla prima ripeteremo le considerazioni fatte sull' equazione analoga proposta nel ($n.^o 15$). La seconda poi non ammettendo se non che un solo valore reale di z corrispondente ad un determinato valore di x, saranno contenute nelle due date equazioni tutte le condizioni necessarie per determinare ciascun punto dell' obbiettiva, e perciò il significato della terza equazione sarà implicito nelle due date.

Di fatti non potendo x essere suscettibile di niun valor negativo, poichè in tal caso sarebbe y im-

immaginaria, ne segue che a qualunque valor positivo di x, corrispondono sempre due valori $+y$, $-y$ eguali in grandezza, ma diversi per segno ed un valor unico di z sempre affetto dal medesimo segno di x. Ciò denota che a qualunque distanza dalla parte positiva del piano A sono nella obbiettiva due punti collocati ambedue ad eguali distanze dalla parte positiva del piano C, ed a parti opposte, ma a distanze eguali per rispetto al piano B; talchè uno di codesti punti avrà le coordinate (x, y, z), l'altro avrà le $(x, -y, +z)$ come nell' esempio precedente.

La sola diversità consiste nell'esser quello relativo ad una linea, che giace in un piano, e questo relativo ad una linea che non può giacere in un piano, e quindi spetta a quella classe di curve, le quali si chiamano a doppia curvatura.

Imperciocchè assegnato un punto nell' obbiettiva, al quale spettino le coordinate (x, y, z) ve n' ha sempre un altro corrispondente alle $(x, -y, +z)$. Adunque la retta che unisce codesti due punti è parallela all' intersezione dei due piani A, C perchè i suoi termini hanno la medesima distanza x dal piano A, e la medesima distanza z dal piano C. Similmente supposto nell' obbiettiva un' altro punto corrispondente al sistema di coordinate (x', y', z') ve n' avrà un altro corrispondente al sistema $(x', -y', z')$, e la retta che unisce codesti due nuovi punti sarà pure parallela all' intersezione dei piani A, C, cioè normale al piano B. Se ora si concepisca un piano Π condotto per le due supposte normali al piano B, passerà per quattro punti dell' obbiettiva, e sarà normale al piano B.

Adunque tutti i punti assegnabili nel piano Π avranno le projezioni loro sul piano B in quella medesima retta dove il piano Π sega il piano B (*n.*° 13). Ma se l'obbiettiva potesse giacere in un piano questo piano sarebbe quell' unico, il quale passa per tre punti quali si voglia dell' obbiettiva stessa, e perciò sarebbe il piano Π.

Adunque se l'obbiettiva potesse giacere in un piano, la sua projezione sul piano B sarebbe una retta. Ma ciò si oppone (*n.*° 11) alla natura dell' equazione $z^3 = b^2 x$; dunque ec.

19. Siano le due equazioni $y^2 = px$, $z^2 = p'x$. Avremo $y = \pm\sqrt{px}$, $z = \pm\sqrt{p'x}$. Supposti, come ne' superiori esempi, sempre reali e positivi i coefficienti, nessun valore negativo di x sarà ammissibile, poichè se x sia negativa, riesce immaginaria l'una e l'altra delle y, z.

Posta $x = 0$, sarà pure $y = 0 = z$, e crescendo indefinitamente la grandezza di x positiva, crescerà corrispondentemente quella di y e di z. Adunque l'obbiettiva esiste tutta dalla parte positiva del piano A, passa per l' origine delle coordinate, e procede indefinitamente dalla parte positiva del piano stesso A. Perchè poi ad ogni valore positivo di x corrispondono sempre due valori di y eguali in grandezza, ma diversi per segno, e due valori di z eguali pure in grandezza ma diversi per segno, conosciamo che possono aver luogo tutti i quattro seguenti sistemi di coordinate, a ciascheduno dei quali corrisponde un punto dell' obbiettiva.

$$x,\quad y,\ z;\qquad x,\quad y,\ -z$$
$$x,\ -y,\ z;\qquad x,\ -y,\ -z$$

I. Adunque l' obbiettiva è divisa in quattro rami eguali e simili dai due piani B, C, essendo ciascun ramo collocato in uno degli angoli diedri che formansi dagli stessi piani B, C d' intorno la comune loro intersezione.

II. I due rami collocati da una medesima parte del piano C hanno comune la projezione sul piano B, e reciprocamente que' due rami che sono dalla medesima parte del piano B hanno la projezione comune sul piano C; che è quanto dire, ogni punto di quella projezione sul piano B, che viene determinata dall'equazione $z^2 = p'x$ sarà sempre comune projezione di due punti della obbiettiva, l' uno dei quali avendo le coordinate x, z, avrà per terza coordinata y, l'altro avendo le stesse x, z, avrà per terza coordinata $-y$; e parimenti ogni punto della projezione sul piano C che è determinata dall'equazione $y^2 = px$ sarà projezione comune a due punti della obbiettiva l' uno de' quali avendo le coordinate x, y avrà per terza coordinata z, l' altro avendo le stesse x, y avrà per terza coordinata $-z$.

III. La retta linea la quale congiunge due punti dell' obbiettiva corrispondenti a due sistemi (x, y, z), $(x, -y, -z)$ giace in un piano perpendicolare ai due piani coordinati B, C, ed è divisa per mezzo da ciascheduno di essi, dunque taglia la comune loro intersezione. Perciò tutte le rette, le quali congiungono due punti dell' obbiettiva, determinati da due sistemi di coordinate analoghi ai due precedenti, segano la comune sezione dei due piani B, C.

IV. Lo stesso dobbiamo conchiudere di quelle rette, le quali congiungono rispettivamente i punti determinati dai sistemi di coordinate analoghi ai due $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$.

V. L' angolo d' inclinazione che ciascheduna di tali rette forma con ciascheduno dei piani B, C è determinato dalla costante ragione che hanno fra loro le quantità z, y, cioè nominato φ quell'angolo formato col piano C, sarà $y:z::1:\text{tang.}\varphi::\sqrt{px}:\sqrt{p'x}::\sqrt{p}:\sqrt{p'}$ e quindi $\text{tang.}\varphi = \sqrt{\frac{p'}{p}}$. L'angolo poi col piano B sarà $(90^\circ - \varphi)$.

Adunque tutte le mentovate rette le quali uniscono i punti determinati dai due sistemi (x, y, z), $(x, -y, -z)$ o pure quelli determinati dai due sistemi $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$ sono egualmente inclinate al piano C. Ma si è dimostrato che passano tutte per la comune intersezione dei piani B, C; quelle rette adunque sono tutte fra loro parallele e giacciono in un medesimo piano.

Per la qual cosa due rami dell' obbiettiva contenuti da due angoli diedri opposti, ed intorno la comune intersezione, dei piani B, C, giacciono in un medesimo piano, e costituiscono una sola curva piana. Laonde l' obbiettiva è composta di due curve piane, eguali e simili fra loro, che hanno l' asse comune in quella retta, ove si tagliano i piani B, C, il vertice nell' origine delle coordinate, e i loro piani egualmente inclinati coi piani B, C, ma a parti opposte di essi.

Ora poichè abbiamo veduto (*n.*° 2) che le projezioni di quelle due curve coincidono tanto sul piano B, quanto sul piano C, conchiuderemo che le due equazioni rappresentanti le projezioni sui piani B, C di una sola di quelle curve, saranno le stesse che rappresentano le projezioni dell' altra, o ancora del sistema composto da ambedue. Ciò posto se vogliasi indicato distintamente uno solo di questi tre casi, sarà d' uopo d' una terza equazione, la quale contenga la condizione caratteristica del caso stesso.

20. La terza equazione corrispondente al caso in cui si vogliano rappresentate ambedue le curve insieme, sarà quella che risulta dalle due date equazioni, come si può inferire dal (*n.*° I), cioè $p'y^2 = pz^2$. In quest' equazione si veggono confirmate tutte le proposizioni del (*n.*° V). Imperciocchè è manifesto che la projezione dell' obbiettiva sul piano A, è un sistema di due rette linee, l' una delle quali è determinata dall' equazione $y\sqrt{p'} = z\sqrt{p}$, oppure $-y\sqrt{p'} = -z\sqrt{p}$; l' altra è determinata dall' equazione $y\sqrt{p'} = -z\sqrt{p}$, oppure $-y\sqrt{p'} = z\sqrt{p}$. Adunque conchiuderemo come al (*n.*° 13) che l' obbiettiva giace in due piani

perpendicolari al piano A ed insistenti sulle due rette mentovate. Queste si tagliano scambievolmente in un punto della retta comune ai due piani B, C, poichè ad $y=o$ corrisponde $z=o$, e ciò si verifica contemporaneamente nelle equazioni dell' una e dell' altra retta. Adunque i due piani contenenti l'obbiettiva si tagliano in quella retta medesima, che è comune ai piani B, C.

L'angolo ch' esse rette formano con l' asse delle y, e con quello delle z è determinato dalla costante ragione $\sqrt{p}:\sqrt{p'}$, ed eguaglia l' angolo d' inclinazione formato rispettivamente col piano B o col piano C da ciascheduno de' piani obbiettivi projettati nelle rette medesime. Adunque i due piani obbiettivi sono similmente inclinati al piano B, e similmente inclinati al piano C.

21. Se le proposte equazioni indicar debbano una sola delle due curve accennate, (*n.*° 19) allora, ferme le due equazioni del numero stesso, convien che la terza sia una delle due che si possono dedurre dalla risultante $y^2p'=pz^2$, cioè per l' una delle suddette curve la terza equazione sarà $y\sqrt{p'}=z\sqrt{p}$: per l' altra sarà $y\sqrt{p'}=-z\sqrt{p}$. Per la qual cosa mi sembra coll'addotto esempio abbastanza provato che non senza qualche restrizione si deve intendere quel solito teorema: *una linea è in generale determinata con due projezioni*; e ciò basti per rendere avvertito onde non abusare della preziosa estensione di cui sono dotate le espressioni algebriche.

22. Dimostrato, e come per le date equazioni venga espressa la forma e posizione d' una linea nello spazio, e come dedur si possano le projezioni della medesima, ne segue, che se per mezzo delle opportune equazioni venga rappresentato un sistema di linee esistente nello spazio, tanto dalle stesse equazioni, quanto dalle corrispondenti projezioni potrà essere egualmente indicata ogni

circostanza di posizione reciproca esistente fra le dette obbiettive.

Se queste si tagliano, i valori delle coordinate corrispondenti ai punti d'intersezione soddisferanno egualmente alle equazioni di ciascheduna obbiettiva. Così le projezioni de' punti stessi saranno punti comuni alle projezioni delle obbiettive su tutti i tre piani coordinati, ovvero due projezioni di ciaschedun d' essi punti sopra due piani coordinati, saranno egualmente distanti dal terzo (*n.*° 9).

Se le linee obbiettive si tocchino, avranno una tangente comune, e le condizioni di essa verranno determinate dalle equazioni delle linee obbiettive che si toccano, siccome le projezioni della tangente medesima, dovendo essere tangenti alle projezioni delle obbiettive, dipenderanno da queste stesse projezioni ec.

Ma il fine di questo saggio, ed i limiti ad esso prescritti non comportano di andar oltre in tale materia, nella quale è indispensabile una certa familiarità colla dottrina delle curve piane da non doversi esigere, nè supporre nelle persone alle quali principalmente s' intende di parlare.

Per la qual cosa converrà ristringersi alle linee rette, per l'analisi delle quali bastano i primi elementi comuni, e le nozioni che abbiamo precedentemente stabilite. Oltre di che i principj che ricaveremo dall' analisi di codeste linee, serviranno di fondamento alle succedenti dottrine.

23. Abbiam veduto (*n.*° 13) che due equazioni della forma $ax = by$, $cx = dz$ determinan completamente una retta, che passa pel punto comune ai tre piani coordinati.

Sarà dunque determinata la lunghezza d'una sua parte intercetta fra due punti corrispondenti a due dati sistemi di coordinate, ammissibili nelle equazioni della retta stessa.

Imperciocchè nominata u codesta parte, (x,y,z) il primo sistema di coordinate che determina un estremo della retta, (x', y', z') il secondo, che determina l'altro estremo, sarà $u^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$; ricavati poscia dalle date equazioni i varj di y, z, y', z' espressi per le rispettive funzioni di x ed x', si otterrà l'equazione $u^2 = \left(1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{d^2}\right)(x'-x)^2$, ove attribuiti i loro valori ad x', ed x, si avrà espressa in quantità note la cercata lunghezza di u. Se uno dei valori supposti fosse $= 0$, il punto corrispondente al sistema di coordinate cui spetta un tal valore sarebbe manifestamente l' origine stessa delle cordinate, ed in tal caso si avrà $u^2 = x^2\left(1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{d^2}\right)$ quando $x' = 0$, oppure $u^2 = x'^2\left(1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{d^2}\right)$ quando $x = 0$.

24. Sarà pure determinato l'angolo d'inclinazione che l' obbiettiva forma con ciascheduno dei piani coordinati.

Imperciocchè da un punto P qualsivoglia della obbiettiva s' immagini condotta una perpendicolare a ciascheduno dei piani coordinati. Sia p la projezione (n.° 6) (Fig. 2) sul piano C del supposto punto P, e si conduca la Op. Sian chiamate al solito (x, y, z) le coordinate determinanti il punto P, eguali rispettivamente alle perpendicolari che dallo stesso punto P abbiamo immaginato essere condotte su i piani coordinati. Se l'angolo d' inclinazione che forma l' obbiettiva col piano C si chiami m, avremo $Op : z :: 1 : \text{tang.}\, m$, ed essendo $Op = \sqrt{x^2+y^2}$, sarà $\text{tang.}\, m = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{cx}{d\sqrt{x^2 + \frac{a^2x^2}{b^2}}} =$

$\frac{cb}{d\sqrt{b^2+a^2}}$. Similmente si troverà l'espressione degli angoli formati cogli altri piani B, A.

25. Considerata come raggio la parte della obbiettiva intercetta fra 'l punto P e l' origine delle coordinate, e nominati rispettivamente m, n, t, gli angoli che forma coi piani coordinati A, B, C; le coordinate x, y, z saranno i rispettivi seni. Perciò, chiamata r la sopradefinita parte dell' obbiettiva, sarà $r^2 = 1 = \text{sen.}^2 m + \text{sen.}^2 n + \text{sen.}^2 t$, e $\text{sen.}^2 m = \cos.^2 n - \text{sen.}^2 t = \cos.(t+n)\cos.(t \backsim n)$ (*a*).

Da ciò si ricava entro quai limiti è sempre circoscritta la somma dei tre angoli d' inclinazione che la retta obbiettiva può formare coi tre piani coordinati.

In fatti non potendo essere maggiore di 90° niuno degli angoli m, n, t, sarà sempre minore di 90° la differenza tra due di essi, e perciò $\cos.(t \backsim n)$ sarà sempre quantità positiva. In oltre essendo sempre quantità positiva $\text{sen.}^2 m$, sarà ancora sempre positiva la quantità $\cos.(t+n)$, cioè la somma di due angoli non potrà mai superare un retto.

Pongasi $(t+n) = 90°$. Sarà $\text{sen.}^2 m = 0$, e perciò $m = 0$. Dunque, essendo eguale ad un retto la somma di due angoli, il terzo sarà necessariamente nullo.

Pongasi $m = 90°$; sarà $\text{sen.}^2 m = 1 = \cos.(n+t)\cos.(t \backsim n)$, equazione impossibile se non sia $n = 0$, $t = 0$. Adunque se uno degli angoli sia retto, ciascuno degli altri due sarà nullo.

Ponendo che nessuno degli angoli sia nullo, sarà sempre $\text{sen.}\, m$ maggiore di $\cos.(t+n)$ e minore di $\cos.(t \backsim n)$, dovendo essere $\cos.(t+n) < \cos.(t \backsim n)$. Dunque m sarà maggiore del complemento di $t+n$, e quindi $(m+n+t) > 90°$. Laonde riassumendo le

(*a*) Il segno $\backsim$ si prende per dimostrare la differenza assoluta tra t ed n indipendentemente dal suo segno positivo, o negativo.

cose dette di sopra si conchiude che la minima somma è 90°. e questo caso esige che uno almeno degli angoli sia nullo.

Quando gli angoli m, n, t sian nel caso della massima somma dovrà il secondo membro dell' equazione $\text{sen.}^2 m = \cos.(t+n)\cos.(t-n)$ aver il massimo valore cui possa giugnere senza mutare la somma $(t+n)$. Ma ciò avviene quando $n=t$, e lo stesso ragionamento si può ripetere sopra l' equazione $\text{sen.}^2 t = \cos.(m+n)\cos.(m-n)$, la qual deve sussistere al pari della precedente, e parimenti sopra l' altra $\text{sen.}^2 n = \cos.(m+t)\cos.(m-t)$. Adunque la massima somma esige che i tre angoli m, n, t siano eguali fra loro.

Ma una retta che passa pel punto comune ai tre piani coordinati, e forma il medesimo angolo d'inclinazione con ciascheduno di essi è nel caso in cui si trova la diagonale del cubo relativamente alle sue faccie. Dunque la massima somma ricercata eguaglia il triplo di quell' angolo che forma la diagonale del cubo con ciascheduna delle faccie.

Il seno di tal angolo, posto $r=1$ è $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

A qualunque retta data nello spazio si potrà condurre una parallela pel punto comune ai tre piani coordinati, e gli angoli formati da questa parallela coi piani coordinati saranno eguali, ordinatamente, a quelli che forma coi piani stessi la retta data. Dunque la somma degli angoli che questa data retta qualunque, forma coi piani coordinati sarà sempre circoscritta dai termini definiti superiormente.

26. Siano le due equazioni $ax=by+p=b\left(y+\frac{p}{b}\right)$, $fx=hz+q=h\left(z+\frac{q}{h}\right)$. Dalla prima si otterrà la

projezione dell'obbiettiva sul piano C ($n.^o$ 6) e si ha la proporzione $x:\left(y+\frac{p}{b}\right)::b:a$. Dalla seconda si otterrà similmente la projezione sul piano B, e si ha $x:\left(z+\frac{q}{h}\right)::h:t$. Ciascheduna di tali projezioni è una retta linea. Dunque ragionando come al ($n.^o$ 13) l'obbiettiva pure è una retta. La differenza tra il presente caso e quello del ($n.^o$ 13) consiste in ciò, che in quello la retta obbiettiva passa per l'origine delle coordinate, ed in questo no.

27. Per tanto se nelle date equazioni le coordinate variabili x, y, z non oltrepassino il primo grado, l'obbiettiva è sempre una retta.

Quando ciascun membro delle date equazioni sia privo di termini costanti, l'obbiettiva passa pel punto comune ai tre piani coordinati ($n.^o$ 13).

Passerà per un punto comune a due soli piani coordinati, se nella sola equazione fra le coordinate, che si riferiscono a tali piani, manchino i termini costanti. Finalmente l'obbiettiva incontrerà ciascheduno dei piani coordinati, in un punto diverso, quando in ciascheduna delle date equazioni si ritrovi alcun termine costante.

28. Si cerchi ora il punto d'incontro dell'obbiettiva con qualsivoglia dei piani coordinati, e sia questo il piano C.

La distanza del cercato punto dal piano C sarà nulla. Dunque dalle date equazioni sarà espresso il supposto caso, quando in esse pongasi $z=o$. Allora si avrà $x=\frac{q}{f}$ ed $y=\frac{aq-pf}{bf}$, e con questi valori delle coordinate x, y si potrà determinare graficamente sul piano C il punto cercato ($n.^o$ 10).

Similmente si potrà determinare il punto d'incontro con ciascheduno degli altri due piani A, B.

29. Passiamo a descrivere la projezione della obbiettiva sopra qualsivoglia dei piani coordinati, e pongasi essere il piano C.

Sia questo piano rappresentato come prima, da quello del foglio (Fig. 3), e le intersezioni di esso coi piani B, A siano rappresentate dalle rette VV', TT' poste ad angoli retti fra loro nel punto O. Quei punti ne' quali l' obbiettiva incontra i piani A, B avranno le projezioni loro, il primo sulla retta TT', il secondo sulla VV' ($n.^{\circ}$ 8).

Per ottenere la seconda di tali projezioni converrà porre $y=0$: ($n.^{\circ}$ 10), e ne verrà $x=\frac{p}{a}$. Presa dunque $O\beta=\frac{p}{a}$ dalla parte V positiva, sarà β la projezione del punto d' incontro col piano B.

Similmente fatto $x=0$ ne verrà $y=-\frac{p}{b}$, e quindi presa $O\alpha=\frac{p}{b}$ dalla parte negativa, sarà α la projezione del punto d' incontro col piano A.

Dunque tirata pei punti α, β l' indefinita $\alpha\beta$, sarà questa retta la projezione dell' obbiettiva sul piano C.

In simil modo si troverà la projezione sopra qual si voglia degli altri due piani A, B.

30. A tutte le ricerche fatte precedentemente sopra la retta obbiettiva nell' ipotesi che passi per l' origine delle coordinate, puossi egualmente soddisfare col metodo stesso ancor quando la retta non passi per l' origine mentovata. Quanto al quesito del ($n.^{\circ}$ 23) si verifica ancora nel presente caso che $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}=u$, quindi $u=(x'-x)\cdot\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{b^2}+\frac{f^2}{h^2}\right)}$, essendo u la parte della obbiettiva intercetta fra due punti, l' uno

de' quali abbia le coordinate (x, y, z), l' altro abbia la (x', y', z').

Per ciò che risguarda la ricerca del ($n.^o$ 24) si potrà rendere identico il nuovo caso con quello, nel seguente modo.

S' immagini un piano B' paralello al piano B e posto alla distanza $-\frac{p}{b}$ da esso. Tutti i punti dello spazio che hanno la distanza y dal piano B, avranno la distanza $\mathrm{Y} = \left(y + \frac{p}{b}\right)$ dal piano B'.

Similmente s' immagini un piano C' paralello al piano C, e posto alla distanza $-\frac{q}{h}$ da esso. Tutti i punti dello spazio che hanno la distanza z dal piano C, avranno la distanza $\mathrm{Z} = \left(z + \frac{q}{h}\right)$ dal piano C'.

Per tanto fatto $\mathrm{X} = x$ se le due date equazioni si trasformino nelle altre due seguenti $a\mathrm{X} = b\mathrm{Y}$, $f\mathrm{X} = h\mathrm{Z}$ le quali rappresentano la relazione tra le coordinate X, Y, Z riferite al nuovo sistema di piani coordinati A, B', C'; queste ultime equazioni esprimono una retta che passa pel punto comune ai tre piani A, B', C' ($n.^o$ 13), la qual retta è la medesima che si esprime per le due prime equazioni date, perchè ogni punto di essa avendo la distanza x dal piano A, la y dal piano B, la z dal piano C deve avere la medesima $x = \mathrm{X}$ dallo stesso piano A, la $\left(y + \frac{p}{b}\right) = \mathrm{Y}$ dal piano B', la $\left(z + \frac{q}{h}\right) = \mathrm{Z}$ dal piano C'. Adunque avremo ($n.^o$ 24)

tang. $m = \frac{\mathrm{Z}}{\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}} = \frac{bf}{h\sqrt{a^2 + b^2}}$, e nominati n, t, gli angoli formati rispettivamente coi piani B, A,

$$\text{tang. } n = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Z^2}} = \frac{ah}{b\,.\,\sqrt{h^2+f^2}}\,,\ \text{tang. } t = \frac{X}{\sqrt{Y^2+Z^2}}$$
$$= \frac{bh}{\sqrt{a^2h^2+b^2f^2}}\,.$$

31. Dalle cose già stabilite si deduce agevolmente che se $x=my+n$, $x=Mz+N$ siano le equazioni di una retta Π, e le $x=m'y+n'$, $x=M'z+N'$ siano quelle di un' altra retta Π' paralella alla Π, dovran essere $m=m'$, $M=M'$.

Imperciocchè le prime due equazioni si riducano alla forma $X=mY$, $X=MZ$, e le due seconde riducansi similmente alla forma $X'=m'Y'$, $X'=M'Z'$. (*n.°* 30).

Saranno A, B', C' i piani ai quali si riferiscono le coordinate X, Y, Z della retta Π; A, B'', C'' quelli ai quali si riferiscono le coordinate X', Y', Z' della retta Π' paralella alla Π.

Se immagineremo presa nella Π una porzione u intercetta fra l'origine delle sue coordinate X, Y, Z ed un punto P, e similmente presa nella Π' una porzione $u'=u$ intercetta fra l' origine delle sue coordinate X', Y', Z' ed un punto P', le coordinate X, Y, Z del punto P dovranno essere rispettivamente eguali alle coordinate X', Y', Z' del punto P'. Perciò $mY=m'Y'$, ed essendo pure $Y=Y'$, sarà necessariamente $m'=m$. Nel modo stesso dimostreremo essere $M=M'$.

In una maniera analoga si dimostra poi per converso che essendo $m=m'$, $M=M'$; le due rette debbon essere paralelle.

32. Relativamente a tre piani coordinati A, B, C essendo date le tre coordinate (x', y', z') d'un punto che si chiami P', e le (x'', y'', z'') d' un altro punto P''; trovar le equazioni della retta che passa pei punti P', P''.

Le cercate equazioni debbon essere in generale della forma, $ax=by+p$, $fx=hz+q$, (*n.* 27). Queste si riducono alle due $x = \frac{b}{a} y + \frac{p}{a}$, $x = \frac{h}{f} z + \frac{q}{f}$. Esse debbono sussistere, tanto ponendo i valori (α, β, γ) delle corrispondenti (x', y', z'), quanto ponendo i valori $(\alpha', \beta', \gamma')$ delle (x'', y'', z''). Ciò posto il problema si riduce ad esprimere i valori de' coefficienti $\frac{b}{a}$, $\frac{p}{a}$, $\frac{h}{f}$, $\frac{q}{f}$ per mezzo delle date quantità α, β, γ, α', β', γ'.

Per tanto essendo $(x''-x') = \frac{b}{a}(y''-y')$, sostituiti i corrispondenti valori, si avrà $\frac{(\alpha'-\alpha)}{(\beta'-\beta)} = \frac{b}{a}$, e perciò se pongasi $b = (\alpha'-\alpha)$, sarà $a = (\beta'-\beta)$. L' equazione generale tra le coordinate x, y diverrà dunque $x = \frac{(\alpha'-\alpha)y+p}{(\beta'-\beta)}$, la quale deve sussistere tanto ponendo $x=\alpha$, ed $y=\beta$ relativamente al punto P, quanto ponendo $x=\alpha'$, $y=\beta'$ relativamente al punto P'. Fatta però l' una o l' altra di queste sostituzioni si ricaverà $p = \alpha\beta' - \alpha'\beta$, e l' equazione tra le coordinate x, y relative alla retta cercata sarà $x(\beta'-\beta) = (\alpha'-\alpha)y + (\alpha\beta'-\alpha'\beta)$. Similmente si troverà quella tra le x, z essere $x(\gamma'-\gamma) = (\alpha'-\alpha)z + (\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)$.

33. Date le due equazioni $x=my+n$, $x=Mz+N$ d' una retta Π, e le due altre $x'=m'y'+n'$, $x'=M'z'+N'$ d' una seconda retta Π', si ricerca se le due rette s' incontrino in qualche punto.

Nell' ipotesi che le due rette s'incontrino, debbono rispettivamente coincidere le coordinate x, y, z, colle loro cognomini x', y', z' nel supposto punto d' incontro. Adunque sarà $my+n = m'y'+n' = Mz+N = M'z+N'$, ed essendo pure $y=y'$, $z=z'$, sarà $y = \frac{n-n'}{m'-m}$, $z = \frac{N-N'}{M'-M}$, d'onde proviene $x = \frac{m'n-n'm}{m'-m}$

$=\frac{M'N-N'M}{M'-M}=x'$. Per la qual cosa l' ammessa ipotesi non potrà sussistere, se pur non sussista l' equazione $\frac{m'n-n'm}{m'-m}=\frac{M'N-N'M}{M'-N}$, ed i membri di essa non abbiano un valore finito. Che se avessero valore infinito, essendo finite le quantità m, m', n, n', M, M', N, N', ciò non potrebbe avvenire se non per essere $m'=m$, $M'=M$, ed in tal caso le rette sarebbero paralelle (*n.*° 31).

34. Si cerchi l' espressione dell' angolo che formano le due rette Π, Π' proposte nel (*n.*° *prec.*).

Se pel punto O comune origine delle coordinate (*n.* 7) s' intenda condotta una retta cui chiameremo OL, paralella alla Π, ed una OL' paralella alla Π', l' angolo compreso in O dalle due rette immaginate OL, OL' sarà eguale al cercato, cui chiameremo φ. In oltre le equazioni della OL' saranno $x'=m'y'$, $x'=M'z'$; (*n.*^{i} 13, 31) quelle della OL saranno $x=my$, $x=Mz$. Pongansi terminate le OL, OL' rispettivamente ne' punti L, L' egualmente distanti dal piano C, cioè sia $z=\beta=z'$ essendo z la coordinata del punto L, z' quella del punto L' relativamente al piano C ed i punti L, L' siano congiunti da una retta LL'. Sarà formato un triangolo, i lati del quale sono la retta LL', la retta OL, e la retta OL',

Abbiamo, (*n.*° 23), $\overline{OL}^2=\beta^2\left(1+M^2+\frac{M^2}{m^2}\right)$,

$\overline{OL'}^2=\beta^2\left(1+M'^2+\frac{M'^2}{m'^2}\right)$, $\overline{LL'}^2=\beta^2\left((M'-M)^2+\left(\frac{M'}{m'}-\frac{M}{m}\right)^2\right)$.

Abbiamo ancora $\cos.\varphi=\frac{\overline{OL}^2+\overline{OL'}^2-\overline{LL'}^2}{2OL.OL'}$; si avrà dunque $\cos.\varphi\,\frac{m'm+m'm.M'M+M'M}{\sqrt{(m^2+M^2m^2+M^2)(M'^2+m'^2M'^2+m'^2)}}$.

Perciò se l' angolo φ sia retto, dovrà essere $\cos.\varphi = 0 = 1 + M'M + \frac{M'M}{m'm}$. In ogni altro caso, uno dei valori che ha il secondo membro dell' equazione precedente pel doppio segno del radicale, sarà il valore di $\cos.\varphi$ e l'altro sarà quello del suo supplemento. Se poi debbasi usar l' uno, o l' altro si conoscerà dall' essere $\overline{LL'}^2 > o <$ di $\overline{OL}^2 + \overline{OL'}^2$.

35. Per un dato punto, che si chiamerà L, condurre una retta, cui chiameremo Π' che formi un' angolo dato φ con una data retta Π.

Siano $x = my + n, x = Mz + N$ le due equazioni della data retta Π: $x' = m'y' + n'$, $x' = M'z' + N'$ quelle della cercata Π'; α, β, γ le coordinate del punto dato L.

Le due equazioni della cercata retta Π' devono sussistere ponendo $x' = \alpha$, $y' = \beta$, $z' = \gamma$, per esser L un punto della retta stessa; quindi ricaveremo le due equazioni

I^a $$n' = \alpha - m'\beta, \quad N' = \alpha - M'\gamma.$$

Per ciò che fu dimostrato (*n.* 33), deve aver luogo l' equazione

II^a $$\frac{m'n - n'm}{m' - m} = \frac{M'N - N'M}{M' - M}.$$

Posti in essa i valori di n', N', ricavati dalla I^a e fatto per brevità $n + m\beta = p$, $N + M\gamma = q$, si otterrà

III^a $$M' = \frac{m'.M.(p - \alpha)}{m'(p - q) + m(q - \alpha)}.$$

Sostituito questo valore nell' espressione di $\cos.\varphi$ ritrovata (*n.* 34), e fatto $p - \alpha = A$, $p - q = B$, $q - \alpha = C$, $= A - B$, $m^2 + m^2M^2 + M^2 = D$, si avrà

IV^a $$m'^2((M^2A^2 + B^2)D.\cos.^2\varphi - m^2(M^2A + B)^2)$$
$$-2m'm((M^2A + m^2C)(M^2A + B) - BCD\cos.^2\varphi) = (M^2A + m^2C)^2$$
$$-(M^2A^2 + m^2C^2)D\cos.^2\varphi.$$

Pos-

Posto per tanto $=$P il coefficiente di m'^2, posto $=2$R quello di m', ed il secondo membro dell'equazione$=$S, sarà $m'=\frac{R}{P}\pm\sqrt{\frac{SP+R^2}{P^2}}$.

Da questo risultato apparisce che essendo generalmente duplice il valor di m', duplici ancora dalle equazioni III^a e I^e si ricaveranno i valori degli altri coefficienti M', n', N', dal che si vede che due rette Π' soddisferanno al quesito, come di già si sapeva dagli elementi ordinari della Geometria piana.

Per ottenere le coordinate del punto d'incontro fra le due rette Π, Π' si porrà uno dei trovati valori di m' nell'equazione III^a e da essa avremo il corrispondente valore di M'. Coi valori di m', M' ricaveremo dalle equazioni I^e, quelli di n' ed N', e conosciuti i valori di m', M', n', N' si avrà in qualsivoglia dei due membri dell'equazione II^a il valore della coordinata x' (*n.*° 33), ovvero della x ad essa eguale. Noto poi x' nelle equazioni della retta Π', ovvero x nelle equazioni della Π, si otterranno i valori delle $y'=y$ e $z'=z$.

36. Quando $\varphi=90°$, sarà $\sqrt{\left(\frac{PS+R^2}{P^2}\right)}=0$,

e quindi $m'=\frac{R}{P}$, d'onde coll'ordine indicato si risale all'unico sistema di equazioni che determina l'unica retta Π' normale alla proposta Π.

37. Se le due equazioni di una retta siano $x=my+n$, $z=Q$, indicheranno evidentemente che la retta è parallela al piano C, cui si riferisce la coordinata z costante, essendo la distanza di questa retta in tutti i punti eguale alla data lunghezza costante Q. Se pongasi essere $Q=0$, la retta obbiettiva sarà nel piano C.

Adunque se siano dati i due sistemi d'equazioni I^e $x=my+n$, $z=Q$; II° $X=m'Y+n'$, $Z=Q=z$

essi indicheranno due rette che giacciono in un piano paralello al piano C e posto alla distanza Q dal medesimo.

La coordinata x corrispondente al loro punto d'incontro si otterrà pure in questo caso dalla formula $x=\frac{nm'-n'm}{m'-m}$ (n.° 33), che non dipende da Q.

Parimenti la coordinata $y=\frac{n-n'}{m'-m}$. Ma l'angolo che formano insieme implica nella sua espressione M, M' (n.° 34) che dipendono da Q.

Per valersi della formola esprimente cos. φ (n.° 34) convien dunque ridurre l'equazione seconda del sistema I° alla forma $x=Mz+N$, e la seconda del sistema (II°) alla forma $X=M'Z+N'$. Saranno determinati i coefficienti M, N, M', N' se faremo in primo luogo $z=\frac{x-N}{M}=Q$; E perchè possa sussistere l'equazione sotto cotal forma, è chiaro che in essa dovrà essere $\frac{x}{M}=0$, qualunque valore finito si attribuisca ad x. Dunque dovrà essere $M=\infty$ Ma dovendo altresì essere $-\frac{N}{M}=Q$, è d'uopo che ancora sia $N=\infty$.

Ponendo adunque $M=\frac{1}{0}$, $N=-\frac{Q}{0}$, e similmente ritrovati i valori di M', N', saranno sodisfatte tutte le necessarie condizioni. Ciò posto la formola esprimente cos. φ diviene

$$\frac{m'm \,.\, M'M + M'M}{\sqrt{(M^2.m^2+M^2)(M'^2m'^2+M'^2)}}=\frac{m'm+1}{\sqrt{(m^2+1)(m'^2+1)}}.$$

38. Per accertarci che questo risultato sia vero, immaginiamo il piano in cui giacciono le rette proposte, e le intersezioni del medesimo coi piani

A, B siano rappresentate (Fig. 3) dalle TT′, VV′. Le supposte rette obbiettive siano rappresentate dalle $\pi\beta$, $\pi\gamma$, essendo in π il loro punto d' incontro scambievole, e β, γ que' punti ove incontrano la VV′. Oπ rappresenterà la coordinata x relativa al punto π, la $\tau\pi$ rappresenterà la corrispondente coordinata y.

Le due rette nel loro piano saranno rappresentate dalle rispettive equazioni $x=my+n$, $X=m'Y+n'$. Il punto β dove la prima incontra la V′V sarà determinato ponendo $y=0$, d' onde viene $x=n=O\beta$. Similmente ricaveremo dalla seconda $X=n'=O\gamma$. Se pertanto si chiami x la coordinata Oτ corrispondente al punto d' intersezione π, sarà $\beta\tau=x-n$,

$$\tau\gamma=x-n',\ \beta\gamma=n'-n,\ \beta\pi=\sqrt{(x-n)^2+y^2}=(x-n)\sqrt{1+\frac{1}{m^2}},$$

$$\gamma\pi=\sqrt{(x-n')^2+y^2}=(x-n')\sqrt{1+\frac{1}{m'^2}},\ \cos.\varphi=\frac{\overline{\beta\pi}^2+\overline{\gamma\pi}^2-\overline{\beta\gamma}^2}{2\beta\pi\cdot\gamma\pi}$$

$$=\frac{(x-n)^2\left(1+\frac{1}{m^2}\right)+(x-n')\left(1+\frac{1}{m'^2}\right)-(n'-n)^2}{2(x-n)(x-n')\sqrt{\left(1+\frac{1}{m^2}\right)\left(1+\frac{1}{m'^2}\right)}}.$$

Ma $x-n=-\frac{(n'-n)m}{m'-m}$, $x-n'=-\frac{(n'-n)m'}{m'-m}$ (n.° 33);

sostituiti questi valori, e ridotta la formola ai minimi termini, si troverà come sopra

$$\cos.\varphi=\frac{1+m'm}{\sqrt{(1+m^2)(1+m'^2)}}.$$

39. Se il caso proposto fosse rappresentato dalle due $\beta\pi$, $\gamma'\pi$ in vece delle due $\beta\pi$, $\gamma\pi$, sarebbe d' uopo mutare il segno del coefficiente m', siccome è chiaro (n.^{i} 31, 14). Allora si avrebbe

$x-n = \frac{(n'-n)m}{m'+m}$, $x-n' = \frac{(n'-n)m'}{m'+m}$, e adoperati questi valori nella formola di $\cos.\varphi$, essa darebbe

$\cos.\varphi = \frac{1-m'm}{\sqrt{(1+m^2)(1+m'^2)}}$ com' è la superiore ($n.^o$ 38), se in essa ponghiamo $-m'$ in luogo di m'.

40. Quando una delle equazioni rappresentanti una linea curva, esprima un valore costante per una delle tre coordinate, si può stabilire relativamente alla curva una conclusione analoga a quella che nel ($n.^o$ 37) abbiamo fatto relativamente ad una retta.

Siano per es. le due equazioni $z=p$, $F(x,y)=0$, rappresentando col simbolo $F(x,y)$ una funzione delle due coordinate x, y.

Egli è manifesto che qualunque sia la relazione alla quale sono obbligate le due coordinate x, y, il punto mobile che descrive la supposta obbiettiva ($n.^o$ 11) nello spazio, ubbidendo alla legge costituita fra le coordinate x, y, z, dalle date equazioni rimarrà sempre alla medesima distanza p dal piano C. Dunque la linea descritta da tal punto sarà in un piano paralello al piano C.

La forma poi della linea stessa verrà determinata solamente dalla equazione $F(x,y)=0$.

Laonde si fa palese che il metodo di rappresentare per mezzo di due coordinate quelle linee le quali possono essere descritte in un piano, non è propriamente se non l' applicazione del metodo generale delle tre coordinate ad un caso particolare ove una di esse è $=0$.

ARTICOLO III.

Della Superficie.

41. Come abbiamo immaginato descriversi nello spazio una linea col movimento di un punto (*n.*° 11), in modo analogo possiam concepire descritta o generata una superficie col movimento d' una linea.

Nella descrizione d' una linea, il punto descrittore non essendo dotato di estensione e figura, la linea descritta non dipende se non dal movimento del punto descrittore medesimo. Nella descrizione della superficie la linea generatrice avendo una forma e grandezza, o costante o variabile, la superficie generata o descritta dipende insieme dal movimento e dalla forma e grandezza della linea generatrice, o descrivente.

42. Ponghiamo per cagione d' esempio essere la linea generatrice un circolo di dato diametro costante. Movasi in modo che il suo piano rimanga sempre a se medesimo paralello, il suo centro, ed ogni punto della circonferenza descrivano rette linee. La superficie generata, o percorsa dalla circonferenza di tal circolo sarà cilindrica: retta od obbliqua, secondo che perpendicolare, od obbliquo sarà il piano del circolo generatore per rispetto alla retta percorsa dal suo centro.

Ponghiamo che il circolo stesso descriva col suo centro un' altra circonferenza circolare alla quale sia sempre normale il piano di esso circolo generatore; la superficie generata sarà anulare.

Ponghiamo che stando immobile un diametro del circolo generatore, questo roti intorno a quel diametro; la superficie generata sarà sferica.

Ponghiamo ancora che il centro descrivendo una retta, il piano rimanendo sempre a se medesimo paralello, il diametro scemi, o cresca successivamente con certa legge; la superficie generata varierà in un numero indefinito di maniere, essendo indefinito il numero delle condizioni secondo le quali può variare il predetto diametro. Se le grandezze di questo procedano come le distanze del centro da un punto determinato della retta ch' esso descrive, la superficie generata sarà conica.

43. Immagino collocata nello spazio una superficie qualsivoglia. La tocchi un certo piano Π paralello ad uno dei piani coordinati, per es. al piano C. Se il piano Π si mova paralellamente a se stesso, segando sempre in ogni sua posizione la proposta superficie obbiettiva, ciascheduna sezione potrà essere considerata come la generatrice della detta superficie obbiettiva (*n.*° 41), ed un' espressione analitica, per mezzo della quale possa essere determinata ciascheduna delle indicate sezioni, determinerà pure la forma, grandezza, e posizione della supposta superficie obbiettiva, perchè tutte quelle sezioni non potran essere comuni a diverse superficie.

Ma le mentovate sezioni si pongono costituite in piani paralelli al piano C, dunque ciascheduna di esse sarà espressa da due equazioni, una delle quali sarà della forma $z = p$, l' altra sarà della forma $F(x, y) = o$ (*n.*° 40).

L' espressione poi che rappresenta la superficie obbiettiva, per le cose che abbiamo superiormente osservate, deve prendere la forma $F(x, y) = o$ allorchè in essa sostituiscasi a z uno dei valori, de' quali questa coordinata è suscettibile. Fatto lo stesso ragionamento per rispetto alla coordinata x, conchiuderemo che l' espressione rappresentante la superficie obbiettiva deve prendere la forma F (y, z) se in essa pongasi un valore p' di cui è suscettibile x, invece della stessa x. Similmente conchiuderemo che l' espressione suddetta deve prendere la forma F (x, z) ponendo in essa un valore p'' di cui sia suscettibile la y invece della stessa y. Dunque l' espressione rappresentante una superficie qualunque sarà sempre compresa in un' equazione della forma F $(x, y, z) = o$, intendendo nel simbolo che costituisce il primo membro una funzione contenente le tre coordinate variabili x, y, z.

44. Sia proposta l' equazione $ax + by + cz + d = o$. Se pongasi in essa $z = p$, diverrà $ax = - by - d - cp$. Questa equazione dovendo sussistere insieme coll' altra $z = p$, ambedue insieme rappresenteranno una retta linea parallela al piano C ($n.^o$ 37). Dunque la sezion piana fatta nella superficie obbiettiva paralellamente al piano C, ed alla distanza p da esso è una linea retta.

Similmente si troverà essere una retta linea la sezion piana fatta paralellamente al piano B ed alla distanza q da esso, come pure una retta la sezion piana fatta paralellamente al piano A e ad una dittanza s dal medesimo. Alla stessa conclusione riesciremo ponendo prima $z = p'$, poi $y = q'$, indi $x = s'$ ec. Dunque ogni sezion piana della superficie obbiettiva, fatta paralellamente ad uno de' piani coordinati è una retta linea. In oltre attribuendo qualunque valore reale ad una delle coordinate, sempre reali riescono i valori delle altre due nella equazione risultante, dunque la superficie obbiettiva si estende indefinitamente per ogni verso, perchè a qualunque distanza da qual si voglia dei piani coordinati, essa incontra un piano secante paralello al piano coordinato medesimo.

Tutte le rette che nascono per le sezioni piane fatte sulla superficie obbiettiva paralellamente ad uno dei piani coordinati sono paralelle fra loro, atteso che i coefficienti delle variabili rimangono costanti nelle equazioni dalle quali esse rette sono rappresentate, come è facile vedere nel caso supposto che i piani secanti sian paralelli al piano C.

Le equazioni rappresentanti due successive sezioni fatte alle distanze rispettive p, p' saranno

$$ax = -by - d - cp\,, \quad z = p$$
$$ax = -by - d - cp'\,, \quad z = p'$$

e quindi le rette rappresentate da tali equazioni sono tra di loro paralelle ($n.^\circ$ 31), e così dicasi di quante altre si voglia. Ma tutte le rette stesse devono passare per quella dove la superficie obbiettiva è tagliata da uno dagli altri due piani coordinati B, A; dunque tutte le rette che nascono tagliando la superficie obbiettiva con piani paralelli ad uno dei coordinati sono costituite in un medesimo piano, e perciò la superficie rappresentata dalla equazione $ax + by + cz + d = o$ è un piano.

45. È chiaro che se nell'equazione precedente suppongasi una delle variabili elevata ad una potenza qualunque superiore, o inferiore alla prima, l'equazione più non soddisfa a tutte le condizioni osservate. Adunque l'equazione rappresentante un piano dovrà necessariamente avere le variabili al primo grado.

46. Sia proposta l'equazione

(D) $(2r - (z - l))(z - l) - (x - a)^2 - (y - b)^2 = o$.

Se pongasi $z = l$, sarà $(x - a)^2 + (y - b)^2 = o$, ciocchè non può avverarsi quando non sia $x = a$, $y = b$. Dunque alla coordinata $z = l$ corrisponde nella superficie obbiettiva un solo punto, e le tre coordinate di esso sono $x = a$, $y = b$, $z = l$.

Posta $z = 2r + l$ sarà pure in tal caso $(x - a)^2 + (y - b)^2 = o$. Dunque ancora alla coordinata $z = 2r + l$

corrisponde, un solo punto, del quale le tre coordinate sono $x = a$, $y = b$, $z = 2r + l$.

Perciò la retta la quale congiunge i due mentovati punti sarà $= 2r + l - l = 2r$ ($n.^o$ 30), ed avendo ambedue gli estremi egualmente distanti dal piano A, ed egualmente distanti dal piano B, sarà paralella all'intersezione dei piani A,B, cioè normale al pianoC.

Ora immaginiamo un piano A′ paralello al piano A e posto alla distanza a da esso. Le coordinate della superficie obbiettiva riferite al piano A′ saranno $(x - a) = X$ ($n.^o$ 30). Similmente immaginato un piano B′ paralello al piano B e posto alla distanza b da esso, le coordinate riferite al piano B′ saranno $(y - b) = Y$. In fine immaginato un terzo piano C′ paralello al piano C e posto alla distanza $r + l$ da esso, le coordinate riferite al piano C′ saranno $(z - (r + l)) = Z$.

Ciò posto, la data (D) si trasforma nell'equazione

$$\text{(E)} \quad (r - Z)(r + Z) = X^2 + Y^2.$$

Apparisce evidentemente che la retta determinata di sopra dai sistemi

$$x = a, \; y = b, \; z = l$$
$$x = a, \; y = b, \; z = 2r + l$$

coincide colla intersezione dei due piani A′, B′. In oltre è chiaro che il punto comune al nuovo sistema di piani coordinati A′, B′, C′ divide per mezzo l'accennata retta. Imperciocchè quando $z = l$ sarà $Z = -r$, e quando $z = +2r + l$, sarà $Z = r$.

Attribuito per tanto alla variabile Z qualunque valore p, ammissibile nella equazione (E), sarà $r^2 - p^2 = P^2 = X^2 + Y^2$, equazione che deve sussistere insieme coll' altra $Z = p$. Laonde la sezion piana fatta nella superficie obbiettiva paralellamente al piano C′, ed alla distanza p da esso è una linea ($n.^o$ 43) espressa dalle due equazioni $Z = p$, $X^2 + Y^2 = P^2$.

Ma la seconda di queste equazioni denota che la linea supposta ha tutti i suoi punti alla distanza P dalla comune origine delle coordinate X, Y considerate nel piano della stessa linea obbiettiva, dunque essa è un circolo che ha il semidiametro $=P=\sqrt{(r^2-p^2)}$ ed il centro determinato dalle coordinate X=o, Y=o, Z=o, riferite ai piani A′, B′, C′.

Se pongasi ancora

$$(E') \qquad (r-Z')(r+Z')=Y'^2+X'^2=P'^2Y'^2,$$

l' equazione (E′) rappresenterà un' altra sezione circolare paralella alla prima, il suo semidiametro sarà $=P'$; ed il centro sarà determinato dalle $X'=o$, $Y'=o$, Z', parimenti riferite ai piani A′, B′, C′. Le lunghezze P, P′ eguaglieranno rispettivamente le coordinate d'un semicircolo dal diametro $=2r$, corrispondenti, la prima all' ascissa $=Z$, la seconda all' ascissa $=Z'$, facendo origine dal centro.

Adunque se sulla retta, gli estremi della quale sono determinati dai due sistemi di coordinate

$$x=a,\ y=b,\ z=l,$$
$$x=a,\ y=b,\ z=2r+l,$$

ed eguaglia $2r$, come abbiamo veduto, si concepisca descritto un semicircolo, il quale si faccia rotare intorno ad essa come asse, ciascun punto della semicirconferenza, descriverà nello spazio una circonferenza circolare, la quale coinciderà con una delle sezioni piane che ponno esser fatte nella superficie obbiettiva paralellamente al piano C, oppure al piano C′. Dunque la detta superficie è quella d'una sfera, il cui diametro eguaglia $2r$, ed il centro è il punto comune ai tre piani A′, B′, C′, cioè viene determinato dalle tre coordinate $x=a$, $y=b$, $z=r+l$ riferite ai piani A, B, C.

47. Sia proposta l' equazione

$$(H) \quad (x-(Bz+C))^2+(y-(Ez+F))^2-\frac{R^2}{L^2}(z-L)^2=o.$$

I. Posta $z=p$, l' equazione che ne risulta rappresenta un circolo (n.° 46). Dunque la sezion piana paralella al piano coordinato C è sempre un

circolo, il cui raggio è generalmente $\frac{R}{L}(z-L)$ ed il cui centro è determinato dalle coordinate
$x=(Bz+C)$, $y=(Ez+F)$, $z=z$.

II. Posta $z=L$, l' equazione (H) diviene $(x-(BL+C))^2+(y-(E+F))^2=0$, la quale non può sussistere se non essendo $x=BL+C$, $y=EL+F$. Dunque la superficie obbiettiva rappresentata dalla equazione (H) ha un vertice determinato dalle coordinate $x=BL+C$, $y=EL+F$, $z=L$.

III. A qualunque valore reale della z corrisponde un sistema di valori reali per le altre due x, y. Dunque la superficie obbiettiva si estende indefinitamente.

IV. Fatta $z=p$ e trasformata l' equazione (H) nella

$$(G) \quad (x-(Bp+C))^2+(y-(Ep+F))^2-\frac{R^2}{L^2}(p-L)^2=0,$$

se facciasi $z=p'$, otterremo la

$$(K) \quad (x-(Bp'+C))^2+(y-(Ep'+F))^2-\frac{R^2}{L^2}(p'-L)^2=0:$$

Ciascheduna di tali, equazioni rappresenta un circolo: il semidiametro del primo sarà $\frac{R}{L}(p-L)$ quello del secondo sarà $\frac{R}{L}(p'-L)$. Dunque i circoli che nascono per le sezioni piane paralelle al piano coordinato C hanno i loro semidiametri proporzionali alle distanze dei rispettivi piani dal vertice della superficie obbiettiva.

V. Fatto $z=0$ si ottiene

$$(Q) \quad (x-C)^2+(y-F)^2-R^2=0,$$

equazione rappresentante sul piano C un circolo dal semidiametro R ed il cui centro è determinato dalle coordinate $x=C$, $y=F$, $z=0$.

VI. Rappresentando la retta che passa pel vertice (*n.*° 47) e pel centro del circolo testè definito

(*n.*° 47) per mezzo delle equazioni $x = my + n$, $x = Mz + N$, (*n.*° 32) sarà $m = \frac{B}{E}$, $n = \frac{CE - BF}{E}$, $M = B$, $N = C$.

Perciò volendo esprimere in funzioni di z ciascheduna delle altre due coordinate spettanti a questa retta, sarà $x = Bz + C$, $y = Ez + F$, $z = z$. Ma dall' equazione (H) abbiamo già dedotto che i centri delle immaginate sezioni circolari sono determinati dalle rispettive coordinate; $x = Bz + C$, $y = Ez + F$, $z = z$. Dunque il centro d' ogni sezione è nel punto dove il piano secante taglia la retta che abbiamo di sopra determinata, la quale si rappresenta dalle equazioni $x = \frac{By + CE - BF}{E}$, $x = Bz + C$; e quindi tal retta potrà essere chiamata l' asse della superficie obbiettiva.

Da tutti i caratteri che abbiamo conosciuti nella equazione (H) risulta ch' essa rappresenta una superficie conica (*n.*° 42).

48. Se pongasi $L = \infty$, l' equazione (H) si cangia nella

$$(\Delta) \quad (x - (Bz + C))^2 + (y - (Fz + F))^2 - R^2 = 0$$

la quale rappresenta un circolo dal costante raggio R qualunque grandezza si attribuisca alla coordinata z.

La retta determinata (*n.*° 47, VI) non dipende da L, e perciò sarà rappresentata dalle medesime equazioni di prima e tutti i centri delle sezioni circolari dal raggio R si troveranno in essa.

Adunque l' equazione (Δ) rappresenta una superficie cilindrica, il cui circolo generatore ha il semidiametro $= R$, e movendosi paralellamente al piano C descrive col suo centro la retta definita nel (*n.*°, 47 VI), la quale perciò sarà l' asse della detta superficie.

49. Gli angoli che forma l' asse sopra indicato coi piani coordinati si dedurranno dalle equazioni

dell'asse medesimo col metodo insegnato dal ($n.^o$ 24).

Ma quando sia normale al piano C conviene che dalle sue equazioni risulti $x-x'=o$, $y-y'=o$ e quindi B=o, E=o.

Similmente dedurremo il carattere indicante quando l'asse è perpendicolare ad uno degli altri piani coordinati. Con quest' indizio si determinerà prontamente quali termini devon mancare nelle equazioni (H), (Δ) quando si avveri il supposto caso, e quindi potremo da esse immediatamente intendere quando l'asse trovisi o no perpendicolare ad alcuno dei piani coordinati.

Per le medesime ragioni che furono addotte nel fine del ($n.^o$ 22) ci asterremo dall' ulteriore analisi delle superficie curve, rivolgendo piuttosto la nostra attenzione alle piane.

50. Trovar le equazioni di una retta che dall' origine delle coordinate cada perpendicolare sopra un dato piano.

L'equazione del dato piano, sia

$$\text{(D)} \quad ax+by+cz+d=o,$$

e sia (E) ($x=m'y$, $x=M'z$) quel sistema di equazioni che determina la retta cercata, cui nomineremo P.

Se per essa intendasi condotto un piano Π normale al piano coordinato C, sarà pure normale al piano obbiettivo, e quindi l' intersezione del piano Π col piano C, cioè la projezione della retta P sullo stesso piano C sarà normale all' intersezione del piano obbiettivo col piano C. Similmente ragionando si conchiuderà essere la projezione della retta P sul piano B normale all' intersezione dello stesso piano B col piano obbiettivo. Posta ora $z=o$ nell' equazione (D) avremo

$$\text{(F)} \quad x=\frac{-by-d}{a}$$

equazione rappresentante l' intersezione del piano C col piano obbiettivo ($n.^o$ 44). Inoltre la (G) $x=m'y$ sarà quella che rappresenta sul piano C la projezione della retta P. Adunque dalla formola esprimente cos. φ ($n.°$ 38) avremo $1 + m'm = 0$ essendo nel caso nostro cos. $\varphi = 0$. Posto dunque $m = -\frac{b}{a}$ come esige l' equazione (F), ne ricaveremo $m' = \frac{a}{b}$. Similmente si troverà $M' = \frac{a}{c}$: quindi le equazioni (E) divengono

$$(S) \quad x = \frac{a}{b} y, \; x = \frac{a}{c} z.$$

51. Si troveranno le coordinate del punto dove una retta data qualunque, e per conseguenza ancora la normale determinata ($n.°$ 50), incontra il piano abbiettivo, ponendo nell' equazione (D) i valori di y, z espressi in funzioni di x per mezzo delle equazioni rappresentanti la data retta, e nel caso presente per mezzo delle equazioni (E). Avremo pertanto $ax + \frac{b^2x}{a} + \frac{c^2x}{a} + d = 0$, d' onde si ottiene $x = -\frac{ad}{a^2+b^2+c^2}$. Con questo valore sostituito nelle equazioni (E) troveremo le altre due coordinate $y = -\frac{bd}{a^2+b^2+c^2}$, $z = -\frac{cd}{a^2+b^2+c^2}$.

52. Si concepisca il triangolo rettangolo formato dalla predetta normale P ($n.°$ 50) e dalle due rette nelle quali l'immaginato piano Π taglia rispettivamente il piano obbiettivo, ed il piano C. In questo triangolo, l' angolo acuto adjacente alla normale, misura l' inclinazione della medesima col piano C, l' altro angolo acuto misura l' inclinazione del piano obbiettivo collo stesso piano C.

Similmente si trova che gli angoli, i quali rispettivamente misurano l'inclinazione del piano obbiettivo cogli altri due piani coordinati, sono complementi degli angoli, i quali misurano l' inclinazione della normale P cogli stessi piani. Per la qual cosa, assumendo la retta P come raggio, le coordinate del suo punto d' incontro col piano obbiettivo corrisponderanno ordinatamente ai coseni degli angoli che forma lo stesso piano obbiettivo coi piani coordinati. Si chiamino μ, ν, ε gli angoli rispettivamente formati coi piani A, B, C. La lunghezza della retta P sarà $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2+c^2} = -\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (*n.*° 30). Quindi avremo . . . .

$$\cos.\mu = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos.\nu = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos.\varepsilon = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Da questo e dal (*n.*° 25) si deduce che nominato φ l' angolo che forma la diagonale del cubo con una delle sue faccie, sarà $270^\circ - 3\varphi$ la menoma somma che formar possano i tre angoli, μ, ν, ε, e 180° la massima.

Se uno degli angoli mentovati sia retto, per es. quello col piano C; sarà la corrispondente quantità $c=0$. Se il piano obbiettivo sia paralello ad uno de' piani coordinati, i coefficienti delle coordinate riferite agli altri due saranno nulli. Per es. se il piano obbiettivo sia paralello al piano A, sarà $c=b=0$, talchè alla semplice ispezione dell' equazione (D) potremo conoscere se il piano da essa rappresentato sia perpendicolare o paralello ad alcuno dei piani coordinati.

53. Dati due piani per mezzo delle equazioni corrispondenti

(D) $\quad ax+by+cz+d=0$, $\quad$ (E) $\quad \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$:

determinare la scambievole intersezione di essi e l' angolo della reciproca inclinazione.

Quanto alla prima parte del quesito, è chiaro che dovendo essere comuni all' una ed all' altra equazione le coordinate che appartengono all' intersezione cercata, basterà eliminare una delle coordinate stesse per ottenere dalle due date equazioni una risultante che rappresenti una projezione della retta cercata. Perciò eliminata z avremo

$$x(a\gamma - \alpha c) = y(\beta c - b\gamma) + (\delta c - d\gamma)$$

ed eliminata y avremo

$$x(a\beta - \alpha b) = z(\gamma b - c\beta) + (\delta b - d\beta):$$

equazioni determinanti la cercata retta di intersezione.

Passando alla seconda parte del quesito, pel punto O, comune origine delle coordinate, s' intendano condotte due rette (*n.*° 50) P, Π, la prima delle quali sia perpendicolare al piano che si rappresenta dall' equazione (D), l'altra sia perpendicolare a quello che si rappresenta dall'equazione (E). L' angolo formato in O dalle due rette accennate eguaglia il supplemento di quello che si cerca. Tutto dunque si riduce a trovar l' angolo formato dalle due rette P, Π. Posto pertanto le equazioni della P essere, $x=my$, $x=\mathrm{M}z$, quelle della Π essere $x=m'y$ $x=\mathrm{M}'z$ avremo (*n.*° 50) $m=\frac{a}{b}$, $\mathrm{M}=\frac{a}{c}$, $m'=\frac{\alpha}{\beta}$, $\mathrm{M}'=\frac{\alpha}{\gamma}$. Questi valori applicati alla formola del (*n.*° 34) danno il valore di $\cos.\varphi$, e $180° - \varphi$ sarà l' angolo cercato.

54. Data l' equazione d' un piano

$$(\mathrm{D}) \qquad ax + by + cz + d = 0$$

e le equazioni d' una retta P

$$x = my + n, \quad x = \mathrm{M}z + \mathrm{N}$$

trovar l' angolo che forma la retta P, col piano D.

Se sul punto dove la retta P incontra il piano D s' intenda eretta una perpendicolare al piano stesso, l' angolo compreso da essa perpendicolare e dal-

dalla P sarà complemento di quello che si cerca. Questo complemento sarà eguale all' angolo compreso da due rette condotte per l' origine delle coordinate, l' una paralella alla P, l' altra normale al piano D.

Le equazioni della prima saranno

$$x = my\,,\quad x = \mathrm{M}z$$

($n.^\circ$ 31); quelle della seconda saranno

$$x = \frac{a}{b}y\,,\quad x = \frac{a}{c}z$$

($n.^\circ$ 50). L'angolo φ compreso da queste rette sarà determinato dalla formola del ($n.^\circ$ 34), e $90^\circ - \varphi$ sarà l' angolo cercato.

55. Dato il sistema delle equazioni

$$(\mathrm{P}) \qquad x = my + n\,,\quad x = \mathrm{M}z + \mathrm{N}$$

e quello delle

$$(\mathrm{Q}) \qquad x = m'y + n'\,,\quad x = \mathrm{M}'z + \mathrm{N}'$$

rappresentanti due rette che non siano poste in un medesimo piano; determinare quella retta che è comune normale ad ambedue le date.

Le equazioni della retta cercata saranno della forma

$$(\mathrm{R}) \qquad x = m''y + n''\,,\quad x = \mathrm{M}''z + \mathrm{N}''$$

Sarà dunque soddisfatto il quesito se siano determinati i valori dei coefficienti m'', n'', M'', N''.

Dovendo la retta cercata R incontrar ciascheduna delle date P, Q avremo le due seguenti equazioni ($n.^\circ$ 33)

$$\frac{m''n - n''m}{m'' - m} = \frac{\mathrm{M}''\mathrm{N} - \mathrm{N}''\mathrm{M}}{\mathrm{M}'' - \mathrm{M}}$$

$$\frac{m''n' - n''m'}{m'' - m'} = \frac{\mathrm{M}''\mathrm{N}' - \mathrm{N}''\mathrm{M}'}{\mathrm{M}'' - \mathrm{M}'}$$

dalle quali si ottengono i valori di N'', n''.

In oltre la retta cercata R forma angoli retti con ciascheduna delle due date. Adunque (*n.*° 34) avremo

$$m\,m''+M\,M''\,.\;m\,m''+M\,M''=0$$
$$m'm''+M'M''\,,\;m'm''+M'M''=0$$

dalle quali equazioni si ottengono i valori di m'', M''.

CAPITOLO IV.

Sulla Commutazione delle coordinate.

56. Per mezzo delle corrispondenti equazioni, dati tre piani che passino per un medesimo punto comune; trasportare ad essi le coordinate. Si chiamino A′, B′, C′ i nuovi tre piani e l'equazione, o il sistema di equazioni, per cui mezzo si determina un dato oggetto, riferendo le sue coordinate ortogonali x, y, z ai soliti piani A, B, C rapprensentisi per mezzo del simbolo $f(x, y, z)$ cioè funzione delle quantità x, y, z.

Chiameremo I un punto determinabile per mezzo di $f(x, y, z)$ e supporremo essere $x'=t$, $y'=s$, $z'=u$ le coordinate del punto I riferite ai piani A, B, C. Dalle date equazioni corrispondenti ai nuovi piani coordinati si dedurranno quelle che determinan le scambievoli intersezioni di essi (*n.*° 53).

Avremo quindi le equazioni corrispondenti alle tre rette le quali dal punto I siano condotte ordinatamente paralelle alle intersezioni predette (*n.*° 31).

Ciascheduna di tali rette incontrerà uno dei piani A′, B′, C′ ad essa opposto e le coordinate determinanti ciascun punto d' incontro rispettivamente ai piani coordinati A, B, C si otterranno espresse per funzioni di t, s, u, (*n.*° 51).

Si chiamano rispettivamente X, Y, Z le porzioni delle mentovate rette che giacciono fra il punto I ed i piani A′, B′, C′ da esse incontrati. Ciascheduna delle X, Y, Z si esprimerà per t, s, u, (*n.*° 30).

Adunque risulteranno tre diverse equazioni, ciascheduna delle quali contiene le t, s, u ed ogn' una di queste quantità indeterminate potrà col mezzo dell' eliminazione esprimersi per X, Y, Z.

Laonde se nella $f(x, y, z)$ sostituiscansi in luogo di $t = x$, $s = y$, $u = z$, i mentovati valori espressi per X, Y, Z sarà compiuta la dimandata commutazione.

Nella seguente tavola indicheremo l' ordine della risoluzione (*a*).

Indicando più brevemente i coefficienti, delle variabili u, t, s, queste equazioni si riducono alle tre seguenti

$$u\Delta - s\Psi - t\Pi + V = 0$$
$$u\Delta' - s'\Psi - t\Pi' + V' = 0$$
$$u\Delta'' - s\Psi'' - t\Pi'' + V'' = 0$$

e per mezzo delle medesime si ricaveranno i valori di t, s, u da sostituirsi in vece di x, y, z, nella $f(x, y, z)$, la quale diverrà F(X, Y, Z) cioè funzione di nuove coordinate relative ai tre piani A′, B′, C′, paralelle rispettivamente alle loro intersezioni, e determinanti il medesimo oggetto che si rappresentava da $f(x, y, z)$.

57. Se siano scambievolmente normali i due piani A′, B′ (*n.*° 56), sarà retto l' angolo che nel (*n.*° 53) fu chiamato φ, e le equazioni delle due rette che lo comprendono saranno (*n.*° 50).

(*a*) Vedi la tavola che per comodo è stata posta in fine, dopo la quale continua il dettato.

$$x = \frac{a}{b} y, \qquad x = \frac{a}{c} z$$

$$x = \frac{a'}{b'} y, \qquad x = \frac{a'}{c'} z$$

Adunque (*n.*° 34) avremo $1 + \frac{aa'}{cc'} + \frac{bb'}{cc'} = 0$, cioè $aa' + bb' + cc' = 0$.

Considerando nel modo stesso le altre combinazioni binarie dei piani A′, B′, C′ verremo a conchiudere che se tutti i tre nuovi piani siano tra loro scambievolmente normali debbono avverarsi le tre equazioni

$$a\,a' + b\,b' + c\,c' = 0$$
$$a\,a'' + b\,b'' + c\,c'' = 0$$
$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 .$$

58. Quando uno de' nuovi piani, per es. A′ coincida con uno dei primi piani coordinati, per e. A, sarà $b = c = 0$ (*n.*° 52). Essendo in oltre $x = 0$ nell'equazione del piano A′, essa darà $x = 0 = -\frac{d}{a}$.

Similmente se un altro dei nuovi piani per es. B′ coincida con B, sarà $a' = c' = 0$ ed $y = 0 = -\frac{d'}{b'}$. Questi valori sostituiti nelle formule della tavola (*n.*° 56) le renderanno conformi alle particolari condizioni che abbiamo introdotte nel problema generale.

Di fatti, poichè nelle equazioni esprimenti la retta comune ai piani A′, B′ si pone $x = 0$, $y = 0$, questa retta coinciderà coll' intersezione dei due piani A, B, alla quale soltanto conviene la condizione di $x = 0$, $y = 0$. Ma ciò deve appunto accadere se i piani A′, B′ rispettivamente coincidono con A, B, dunque la sostituzione di $x = 0$, $y = 0$ nelle citate formule (*n.*° 56) le ridurrà soddisfacenti al caso nostro. Per tanto poichè l'equazione $x = P''y + Q''$ diviene $0 = P''$, $0 + Q''$, dovrà essere $Q''=o$, e $P''=\frac{o}{o}$. Ciò si avrà sostituendo nelle espressioni di Q'' e P'' i valori che abbiamo determinati essendo $Q''=\left(\frac{d'c-c'd}{ac'-a'c}\right)=\left(\frac{d'o-od}{ao-oo}\right)=\frac{d'-d}{a}=\frac{d'}{a}=o$ per essere $-\frac{d}{a}=o$ e quindi $a=-\frac{1}{o}$, onde $\frac{d'}{a}=-o$; in oltre $P''=\left(\frac{b'c-c'b}{ab'-a'c}\right)=\left(\frac{b'o-oo}{ac-oo}\right)=\frac{b'}{a}=\frac{1}{o}\cdot\frac{o}{1}$, dovendo essere $-\frac{a'}{b'}=o$ e quindi $b'=-\frac{1}{o}$.

Passando all' equazione $x=K''z+L''$ troviamo ch' essa diviene $o=K''z+L''$. Adunque esser deve $L''=o$, e $K''=o$, d' onde poi $z=\frac{o}{o}$ cioè indefinita, come appunto conviene all' intersezione dei due piani A, B.

Tutte queste condizioni si adempiono colle predette sostituzioni nei valori di L'', K''. Imperciocchè $L''=\left(\frac{d'b-b'd}{ab'-a'b}\right)=\left(\frac{d'o-b'd}{ab'-oo}\right)=-\frac{d}{a}=o$, $K''=\frac{(c'b-b'c)}{ab'-a'b}=\left(\frac{oo-cb'}{ab'-oo}\right)=\frac{o}{a}=o$.

59. Si cerchin ora le equazioni della retta comune ai piani A'C', la quale sappiamo che nel supposto caso diviene l' intersezione dei piani A, C'.

Le equazioni $x=P'y+Q$, $x=K'z+L'$ divengono $o=P'y+Q'$, $o=K'z+L'$. Adunque sarà $Q'=o$, $L'=o$. Ma le equazioni $o=P'y$, $o=K'z$ non possono sussistere generali se pur non sia $P'=o$, $K'=o$: adunque $y=\frac{x}{P'}=\frac{o}{o}$, $z=\frac{x}{K'}=\frac{o}{o}$, cioè il valore di y e di z sarà sempre indefinito rispettivamente al x che deve sempre esser nulla. Tutte queste particolarità si riscontrano facendo le mentovate sostituzioni. Ma la relazione reciproca di y e z risulterà dall' equazione y P' Q' $=$ zK' $+$ L', la quale ridotta alla più semplice espressione diviene $-(ac''-a''c)z=y(ab''-a''b)+(ad''-a''d)$ e fatte le sostituzioni, $-z(ac''-a''c)=y(ab''-a''o)+ad''+a''d$. cioè $-z=y\frac{ab''}{ac''}+\frac{ad''}{ac''}-\frac{a''d}{ac''}=\frac{yb'+d''}{c''}$ per essere $-\frac{d}{a}=o$, e quindi ancora $-\frac{a''d}{ac''}=o$.

Tale appunto è il risultato esprimente l'intersezione del piano A col piano C' del quale sia data l'equazione $a''x+b''y+c''z+d''=o$.

Pag.	Linea	Errori	Correzioni
4	1	Condotta	Condotte
6	32	parallela VV′	parallela a VV′
7	11	in essa AP′	in essa aP′
11	7	projeziono	projezione
24	25	$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen.}^2 m = 1 = \cos. \\ (n+f)\cos.(t \sim n), \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen.}^2 m = 1 = \cos. \\ (n+t)\cos.(t \sim n), \end{array} \right.$
26	4	$::h:t$	$::h:f$
28	2	Abbia la	Abbia le
	26	$q - \alpha = C$,	$q - \alpha = c$
42	7	$= P'^2 Y'^2$	$= P'^2$
43	5	$+ (y - (L+F))^2$	$+ (y - (EL+F))^2$
49	18	$x = \frac{By - CE - BF}{E} \, 1 \, x$	$n = \frac{By - DE - BF}{E}, x$
51	3	si chiamano	si chiamino,

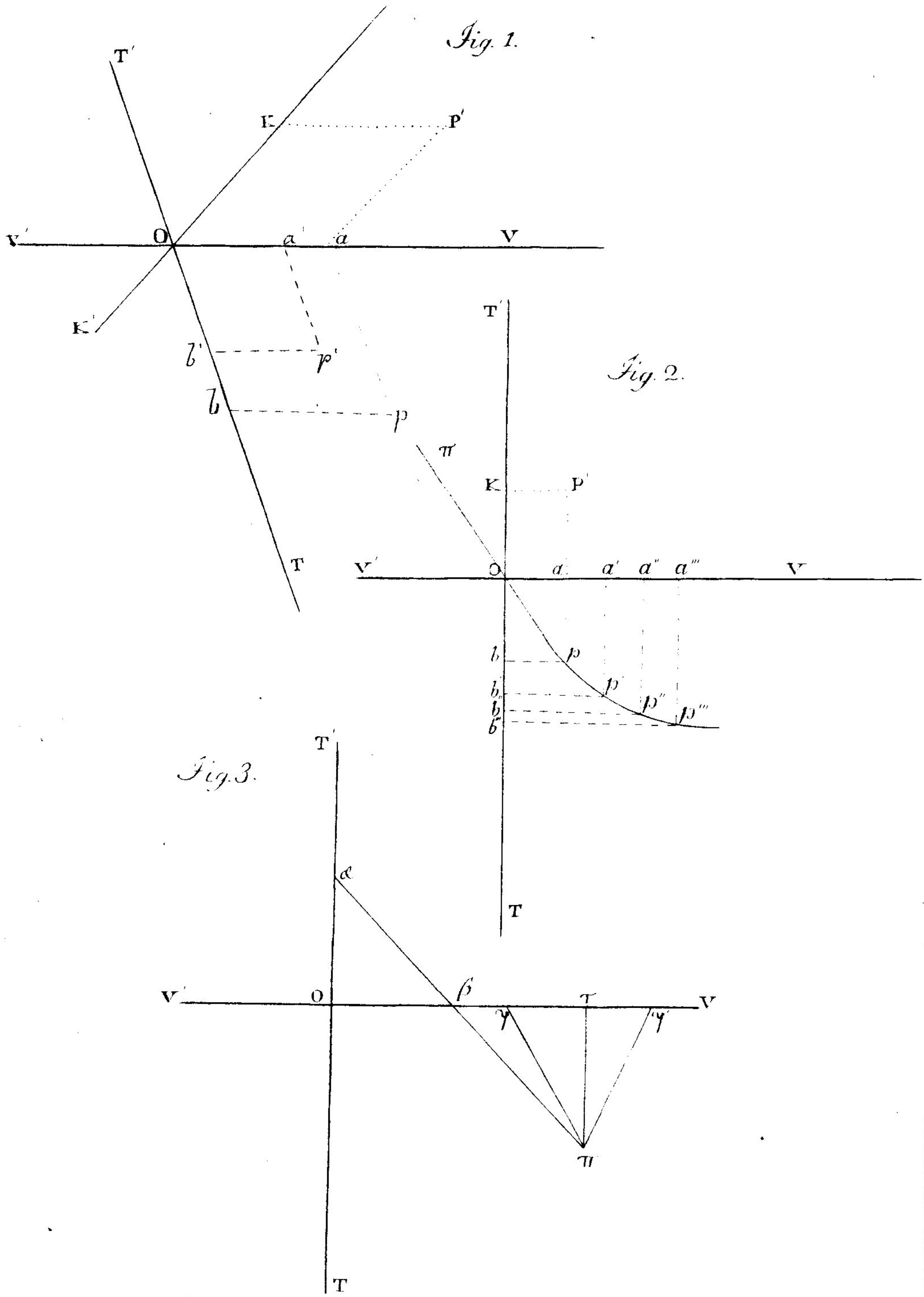

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Equazioni de' nuovi piani coordinati.

$$\begin{aligned}
&A' \;\ldots\ldots\; a x + b y + c z + d = 0 \\
&B' \;\ldots\ldots\; a' x + b' y + c' z + d' = 0 \\
&C' \;\ldots\ldots\; c'' x + b'' y + c'' z + d'' = 0
\end{aligned}$$

Equazioni del dato punto I ……… $x' = t\,,\; y' = s\,,\; z' = u$

Equazioni delle scambievoli intersezioni ($n.^{o}$ 53).

tra B', C'

$$x = \frac{y(b''c' - c''b') + (d''c' - d'c'')}{a'c'' - a''c'} = y.P + Q$$

$$x = \frac{z(c''b' - b''c') + (d''b' - d'b'')}{a'b'' - a''b'} = zK + L$$

tra A', C'

$$x = \frac{y(b''c - c''b) + (d''c - c''d)}{ac'' - a''c} = yP' + Q'$$

$$x = \frac{z(c''b - b''c) + (d''b - db'')}{ab'' - a''b} = zK' + L'$$

tra A', B'

$$x = \frac{y(b'c - c'b) + (d'c - c'd)}{ac' - a'c} = yP'' + Q''$$

$$x = \frac{z(c'b - cb') + (d'b - b'd)}{ab' - a'b} = zK'' + L''$$

Equazioni delle rette condotte dal punto dato I parallelamente alle intersezioni ($n.^{o}$ 31)

tra B', C'

$$\left.\begin{aligned} x &= Py + n \\ x &= Kz + N \end{aligned}\right\}\ 1.^{a} \qquad \left\{\begin{aligned} n &= t - Ps \\ N &= t - Ku \end{aligned}\right.$$

tra A', C'

$$\left.\begin{aligned} x &= P'y + n' \\ x &= K'z + N' \end{aligned}\right\}\ 2.^{a} \qquad \left\{\begin{aligned} n' &= t - P's \\ N' &= t - K'u \end{aligned}\right.$$

tra A', B'

$$\left.\begin{aligned} x &= P''y + n'' \\ x &= K''z + N'' \end{aligned}\right\}\ 3.^{a} \qquad \left\{\begin{aligned} n'' &= t - P''s \\ N'' &= t - K''u \end{aligned}\right.$$

Equazioni delle coordinate determinanti i rispettivi punti d'incontro ($n.$ 50)

tra la retta $1.^{a}$ ed il piano A'

$$x = K\varepsilon + N$$

$$y = \frac{K\varepsilon + N - n}{P}$$

$$z = \varepsilon = \frac{b(n - N) - P(aN + d)}{K(aP + b) + cP}$$

tra la retta $2.^{a}$ ed il piano B'

$$x = K'\varepsilon' + N'$$

$$y = \frac{K'\varepsilon' + N' - n'}{P'}$$

$$z = \varepsilon' = \frac{b'(n' - N') - P'(a'N' + d')}{K'(a'P' + b') + c'P'}$$

tra la $3.^{a}$ ed il piano C'

$$x = K''\varepsilon'' + N''$$

$$y = \frac{K''\varepsilon'' + N'' - n''}{P''}$$

$$z = \varepsilon'' = \frac{b''(n'' - N'') - P''(a''N'' + d'')}{K''(a''P'' + ab'') + c''P''}$$

Valori delle nuove coordinate spettanti al punto I riferite ai piani A', B', C' e parallele ordinatamente alle loro intersezioni ($n.^{o}$ 30)

$$X = (u - \varepsilon)\sqrt{\left(1 + \frac{K^2}{P^2} + K^2\right)} = (u - \varepsilon)\,\Gamma$$

$$Y = (u - \varepsilon')\sqrt{\left(1 + \frac{K'^2}{P'^2} + K'^2\right)} = (u - \varepsilon')\,\Gamma'$$

$$Z = (u - \varepsilon'')\sqrt{\left(1 + \frac{K''^2}{P''^2} + K''^2\right)} = (u - \varepsilon'')\,\Gamma''$$

Dalla prima si ottiene ……………… $\varepsilon = u - \dfrac{X}{\Gamma} = \dfrac{b(n - N) - P(aN + d)}{K(aP + b) + cP}$

Fatto $K(aP + b) + cP = \Sigma$, e sostituiti i valori di N, n, si ha $\Gamma b(Ku - Ps) - P(at - aKu + d)\Gamma - \Gamma\Sigma u + \Sigma X = 0$

Quindi similmente avremo facendo $\Sigma' = K'(a'P' + b') + c'P'$, $\Sigma'' = K''(a''P'' + b'') + c''P''$.

$$\begin{aligned}
&u(K(aP + b) - \Sigma)\Gamma - sbP\Gamma - taP\Gamma - P\Gamma d + \Sigma X = 0 \\
&u(K'(a'P' + b') - \Sigma')\Gamma' - sb'P'\Gamma' - ta'P'\Gamma' - P'\Gamma' d' + \Sigma' Y = 0 \\
&u(K''(a''P'' + b'') - \Sigma'')\Gamma'' - sb''P''\Gamma'' - ta''P''\Gamma'' - P''\Gamma'' d'' + \Sigma'' Z = 0
\end{aligned}$$